Engenharia Biomédica

Laboratórios de Electrónica
(2º semestre / 2ºano)

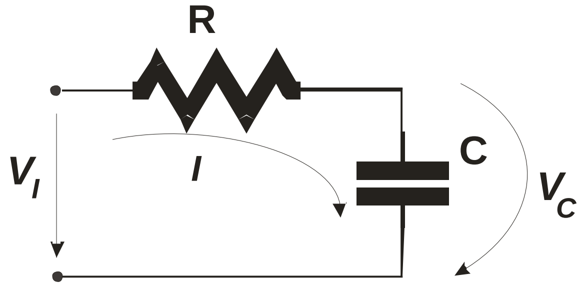
TP5 – Introdução ao T-Spice:
Circuito RC e transístor MOSFET

Texto de apoio

Ano lectivo – 2005/2006

Circuito RC – Constante de Tempo

Considere o circuito ***RC*** da figura abaixo.



onde $v_i(t)$ é a tensão de entrada, $v_o(t)$ a tensão de saída e $i(t)$ a corrente que atravessa o circuito

Aplicando a lei de Kirchhoff para tensões no circuito acima podemos escrever o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} v_i(t) = Ri(t) + v_c(t) \\ \\ v_c(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i(t)dt \end{cases}$$

Sabendo que a corrente no condensador é dada por

$$i_c = C\frac{dv_c(t)}{dt},$$

podemos reescrever a primeira equação do sistema como

$$\tau\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_i(t),$$

onde

$$\tau = RC .$$

Esta equação diferencial descreve a relação entre a tensão de entrada, $v_i(t)$, e a tensão do condensador, $v_c(t)$.

Suponha agora que à entrada do circuito ***RC*** se aplica um degrau de tensão

$$v_i(t) = V_o u(t),$$

onde V_o é a amplitude do degrau. A função $u(t)$ é chamada degrau de *Heaviside*, sendo a sua definição

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}.$$

Nestas condições, a expressão analítica da resposta temporal da tensão do condensador (ou seja, a solução da equação diferencial) é dada por:

$$v_c = V_o(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}),$$

onde a constante τ é designada constante de tempo do circuito ***RC***, sendo o seu valor

$$\tau = RC \,.$$

As unidades desta constante, segundo o sistema SI, é o segundo (tempo). Ela pode ser interpretada de duas maneiras:

1. Como o tempo que seria necessário para a tensão atingir o seu valor máximo caso o declive da subida da tensão fosse constante e igual ao seu valor inicial.
2. Como o tempo que a tensão leva a atingir o valor de $v(\tau)= 0.632\ V_o$.

A segunda interpretação é a mais usual.

• Conceito de Desfasamento (Fasor)

Genericamente falando, componentes passivos são aqueles que não incluem no seu modelo teórico geradores de energia (fontes de tensão ou fontes de corrente). No caso das resistências há dissipação de energia ($P= RI^2$), nas indutâncias e capacidades existe armazenamento e nos transformadores verifica-se uma conversão dos parâmetros de transmissão de energia: tensão e corrente.

Uma tensão sinusoidal tem como expressão genérica:

$$v(t) = V_p \sin(\omega t + \phi)$$

em que (V_p) é o valor máximo de tensão ou amplitude, (ω) a frequência angular em radianos por segundo ($\omega= 2\pi f$) e (ϕ) a fase, i. e. o ângulo no instante t = 0. Semelhantemente se define uma corrente sinusoidal como sendo

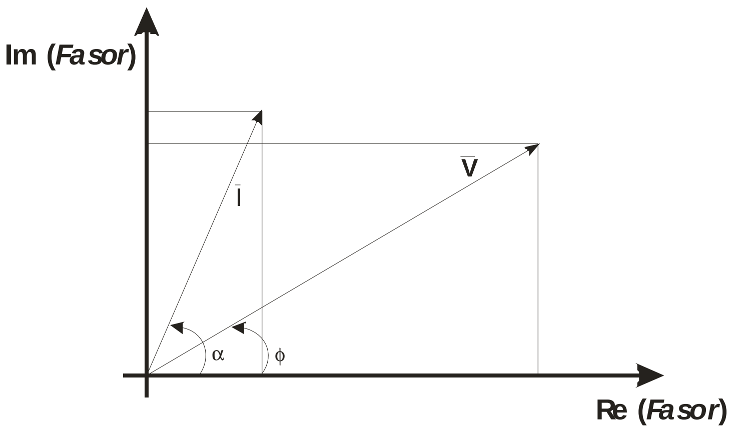
$$i(t) = I_p \sin(\omega t + \alpha)$$

Interessa conhecer as expressões que relacionam tensões e correntes nos componentes passivos. Numa primeira aproximação consideram-se os elementos reais como ideais.

Nesta introdução ao trabalho serão recapitulados os conceitos básicos de Electrotecnia. As demonstrações rigorosas das expressões apresentadas podem ser encontradas na bibliografia indicada no fim ou em qualquer texto básico de Electrotecnia ou Análise de Circuitos.

• Representação no Domínio Complexo

Um sinal sinusoidal de tensão ou de corrente pode ser representado por um vector girante (fasor) com módulo igual a (V_p), frequência angular (ω) e fase (ø) para a tensão e módulo igual a (I_p), frequência angular (ω) e fase (α) para a corrente. As fases (ø) e (α) são medidas relativamente ao semi-eixo positivo das abcissas e no sentido anti-horário.



Repare-se que os vectores descrevem um arco de (ωt_1) radianos ao fim do tempo (t_1) e que para cada instante os valores instantâneos de tensão ou corrente são dados pela projecção da extremidade do vector no eixo imaginário.

Se um circuito eléctrico contém apenas componentes lineares então, em resposta a uma excitação sinusoidal, em qualquer ponto do circuito se registam grandezas electricas (tensões ou correntes) sinusoidais com a mesma frequência, diferindo apenas na amplitude e na fase. É por isso possível abstrair da variável tempo, e trabalhar no domínio das frequências utilizando a seguinte transformação:

$$\begin{aligned} V_p \sin(\omega t + \phi) \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{V} = V_p \angle \overline{V} \\ I_p \sin(\omega t + \alpha) \quad &\Leftrightarrow \quad \overline{I} = I_p \angle \overline{I} \end{aligned} ,$$

onde “π” indica a fase do vector girante. Uma representação igualmente usada, principalmente fora dos textos de matemática, é: “ang(.)”.

É possível ainda introduzir o conceito de impedância $\overline{Z}$:

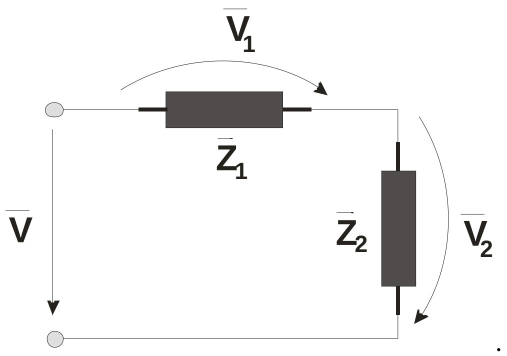
$$\overline{Z} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = R + jX \ ,$$

onde R representa a parte real (resistência) e X a parte imaginária (reactância). O conceito de impedância é uma extensão ou generalização do conceito de resistência; portanto, pode-se também escrever a lei de Ohm para as tensões e correntes sinusoidais representadas por números complexos:

$$\begin{aligned} \overline{V} &= \overline{Z}\,\overline{I} \\ \overline{I} &= \frac{\overline{V}}{\overline{Z}} \end{aligned} .$$

• Divisor de Tensão

No caso geral do divisor de tensão entre duas impedâncias temos:



Da análise do circuito temos que

$$\overline{V} = \overline{Z}\,\overline{I} \ , \qquad \overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 \qquad \text{e} \qquad \overline{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} .$$

Destas relações podemos determinar os valores das atenuações das tensões:

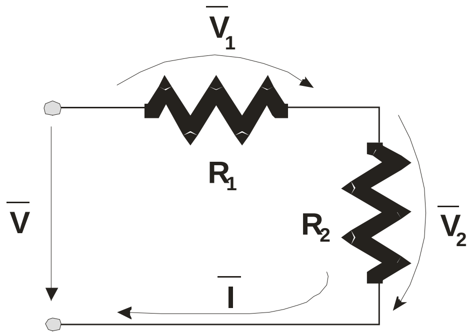
$$\begin{cases} \dfrac{\overline{V}_1}{\overline{V}} = \dfrac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} \\ \\ \dfrac{\overline{V}_2}{\overline{V}} = \dfrac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} \end{cases} .$$

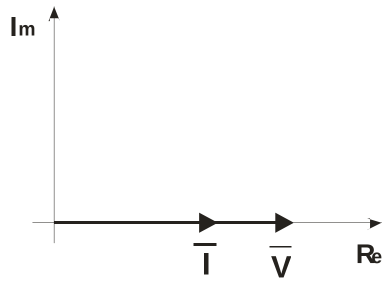
Divisor de Tensão: *Resistência*

A impedância de uma resistência é

$$\bar{Z} = R + j0\,,$$

ou seja, a sua parte imaginária é nula; logo a corrente estará em fase com a tensão.





A amplitude da corrente é dada por:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{V}}{R_1 + R_2}\,.$$

As tensões nas resistências serão dadas por:

$$\begin{aligned} \left|\bar{V}_1\right| &= \frac{R_1}{R_1 + R_2}\left|\bar{V}\right| \\ \left|\bar{V}_2\right| &= \frac{R_2}{R_1 + R_2}\left|\bar{V}\right| \end{aligned},$$

onde o operador $|.|$, denota o módulo do fasor, i.e., a sua amplitude.

Divisor de Tensão: *Circuito RC*

Condensador Puro

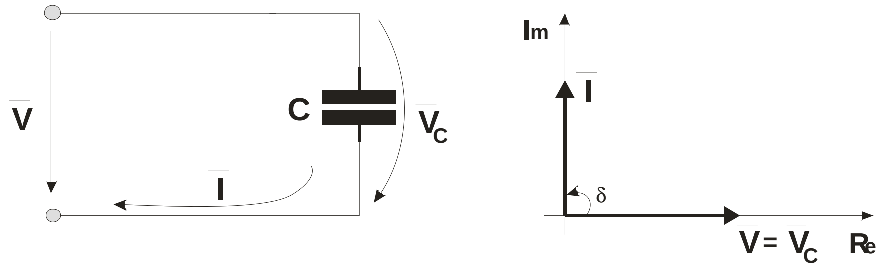
A impedância de um condensador é dada por:

$$\bar{Z} = 0 - \frac{j}{\omega C} = -jX_C\,,$$

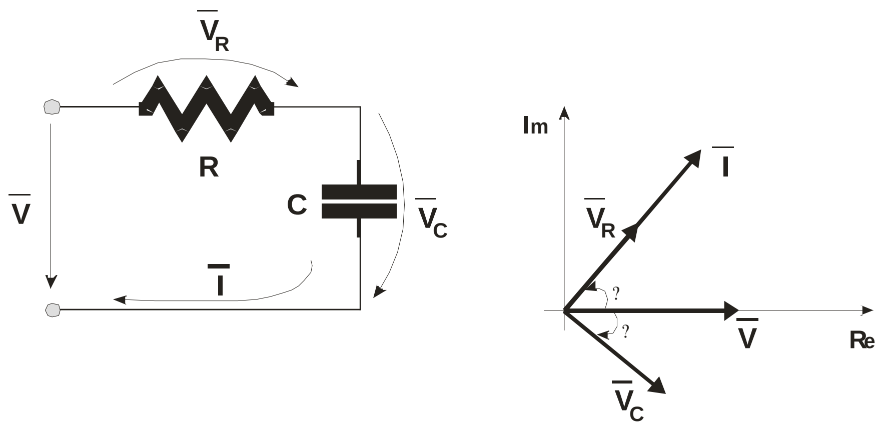
onde ω representa a frequência angular em radianos por segundo, C a capacidade do condensador e X_C a reactância capacitiva.

A reactância de um condensador é inversamente proporcional à frequência da tensão aplicada. A corrente que flui num condensador por aplicação duma tensão sinusoidal estará 90 graus em avanço relativamente à tensão e o seu módulo aumenta proporcionalmente com a frequência:

$$\left|\bar{I}\right| = \left|\frac{\bar{V}}{\bar{Z}}\right| = \frac{\left|\bar{V}\right|}{\frac{1}{\omega C}} = \left|\bar{V}\right|\omega C$$



Circuito RC



Para este circuito a tensão aos terminais do condensador será:

$$\bar{V}_C = -jX_C \bar{I} = \frac{-jX_C}{-jX_C + R}\bar{V} \ .$$

Expandindo a expressão da reactância e decompondo o fasor no seu módulo e fase temos:

$$\left|\bar{V}_C\right| = \left|\bar{V}\right| \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$$

$$\angle \bar{V}_C = -\frac{\pi}{2} - \arctan(-\frac{1}{\omega RC}) \quad .$$

Ao analisarmos a expressão acima verificamos que a medida que a frequência angular tende para 4, a tensão no condensador tende para:

$$\bar{V}_C = \frac{-j}{\omega RC}\bar{V} = \frac{1}{j\omega RC}\bar{V} \ .$$

Considerando ***V*** a tensão de entrada e $\boldsymbol{V_C}$ a tensão de saída é normal designarmos este circuito como um pseudo-integrador. Neste circuito a medida que a frequência angular aumenta, a amplitude do sinal de saída diminui. Um circuito com esta característica de atenuação de sinais com o aumento da frequência é conhecido como filtro passa-baixo.

Quando a frequência angular tende para *0*, a tensão no condensador será coincidente com a tensão de entrada em módulo e fase.

Como exercício determine as expressões para o módulo e a fase do fasor da corrente.

TENSÃO ALTERNADA

Uma tensão alternada (CA – corrente alternada) é aquela cujo módulo varia continuamente e cuja polaridade é invertida periodicamente:

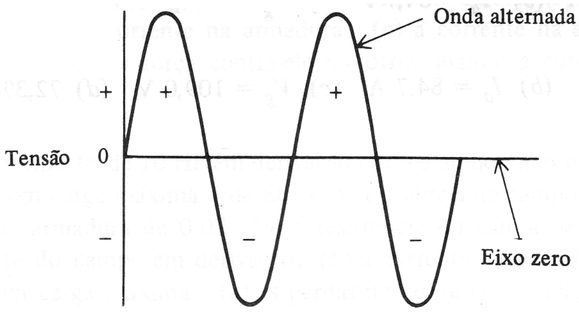


Figura 1: Uma forma de onda de tensão ca.

- O eixo zero é uma linha horizontal que passa pelo centro.
- As variações verticais na onda de tensão mostram as variações do módulo.
- As tensões acima do eixo horizontal têm polaridade positiva (+).
- As tensões abaixo do eixo horizontal têm polaridade negativa (-).

Uma tensão ca pode ser produzida por um gerador, chamado de alternador. Na Figura 2 apresenta-se a forma básica de um gerador ca.

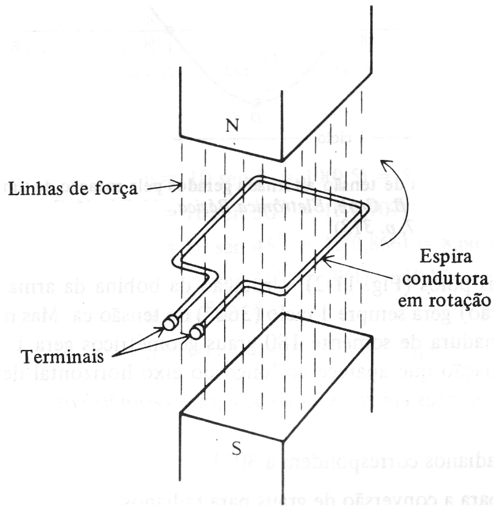


Figura 2: Uma espira girando num campo magnético produz uma tensão ca.

A espira condutora gira através do campo magnético e intercepta linhas de força para gerar uma tensão ca induzida através dos seus terminais.

- Uma rotação completa da espira é chamada de ciclo.

Análise da posição da espira em cada quarto de volta durante um ciclo completo:

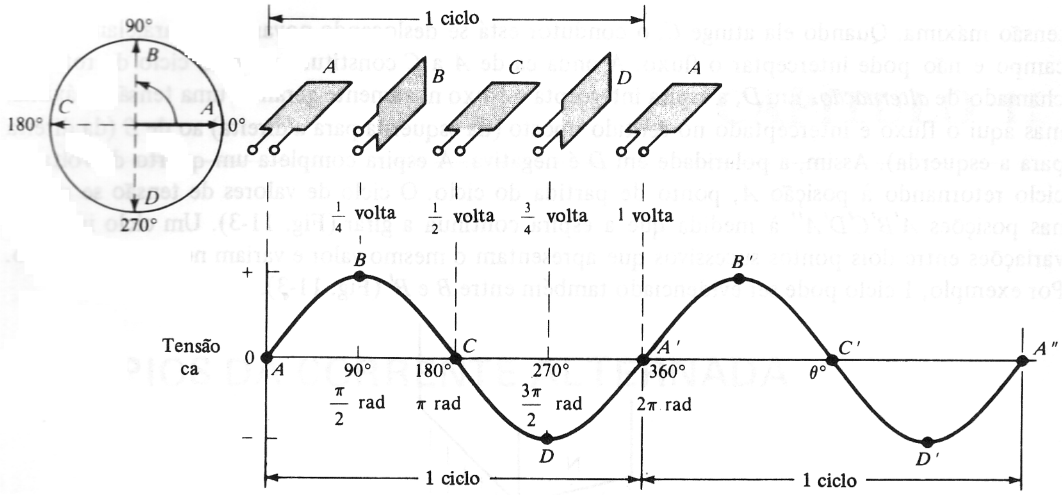


Figura 3: Dois ciclos de tensão alternada gerados pela rotação de uma espira.

Posição A: a espira gira paralelamente ao fluxo magnético e consequentemente não intercepta nenhuma linha de força. A tensão induzida = 0V.

Posição B: a espira intercepta o campo num ângulo de 90º, produzindo uma tensão máxima.

Posição C: o condutor está novamente paralelamente ao campo e não pode interceptar o fluxo, U = 0V.

------------ A onda ca de **A** a **C** constitui meio ciclo de rotação ------------

Posição D: a espira intercepta o fluxo, gerando novamente uma tensão máxima, mas aqui o fluxo é interceptado no sentido oposto (da esquerda para a direita) ao de **B** (era da dta. para esq.). Assim a polaridade em **D** é negativa.

------ Mais um ¼ de volta e a espira retorna à posição **A**, ponto de partida.

- O ciclo de valores de tensão repete-se à medida que a espira continua a girar.

- Um ciclo inclui variações entre 2 pontos sucessivos que apresentam o mesmo valor e variam no mesmo sentido. Ex: entre B e B’ ou C e C’.

MEDIÇÃO ANGULAR

Pelo facto dos ciclos de tensão corresponderem à rotação da espira em torno dum círculo, as partes desse círculo são expressas em ângulos.

O círculo completo = 360º, meio círculo = 180º, um quarto de volta = 90º

Os graus são expressos em radianos (rad) ⇒

Um círculo completo = 360º = 2π rad

ONDA SINUSOIDAL

A forma de onda da tensão da Figura 3 é chamada de onda sinusoidal.

O valor instantâneo da tensão em qualquer ponto é dado por:

$$v = V_M \ \mathrm{sen}(\theta)$$

v – valor instantâneo da tensão, V

V_M – valor máximo da tensão, V

θ - ângulo de rotação, graus ou rad

FREQUÊNCIA E PERÍODO

O número de ciclos por segundo é chamado de **frequência**, que é representada pelo símbolo, ***f***, e dada em hertz (**Hz**). Um ciclo por segundo é 1Hz.

O intervalo de tempo para que um ciclo se complete é chamado de **período**. É representado pelo símbolo, ***T*** e expresso em segundos (*s*).

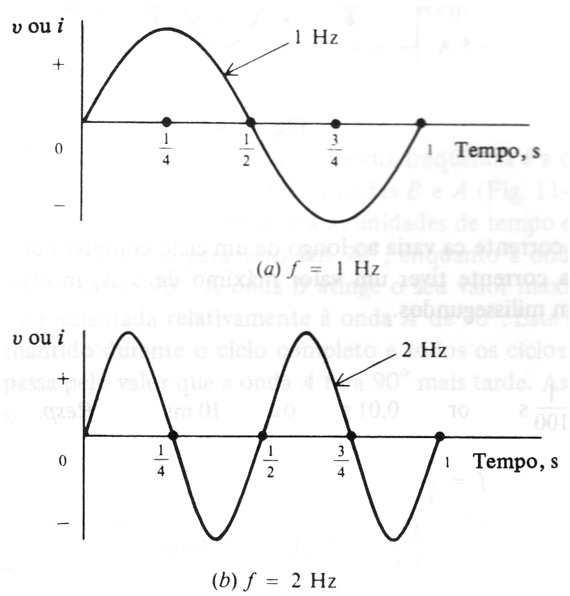
Relação entre frequência e período:

$$f = \frac{1}{T} \ (\mathrm{Hz}) \qquad\qquad T = \frac{1}{f} \ (\mathrm{s})$$

Quanto mais elevada a frequência menor o período.

Figura 4:

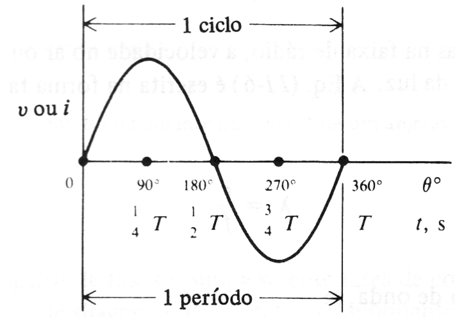
Comparação entre frequências



O ângulo de 360º representa o tempo para um período *T*. Portanto podemos representar o eixo horizontal de uma onda sinusoidal em unidades de graus eléctricos ou em segundos:

Figura: 5

Relação entre graus eléctricos e o tempo



VALORES CARACTERÍSTICOS DE TENSÃO E CORRENTE CA

Uma onda sinusoidal possui vários valores instantâneos ao longo de um ciclo. É conveniente especificar os módulos para efeitos de comparação de uma onda com outra.

Valor de **pico**, Valor **médio**, Valor quadrático médio ou **rms** ou valor **eficaz**. Estes valores aplicam-se tanto à corrente como à tensão.

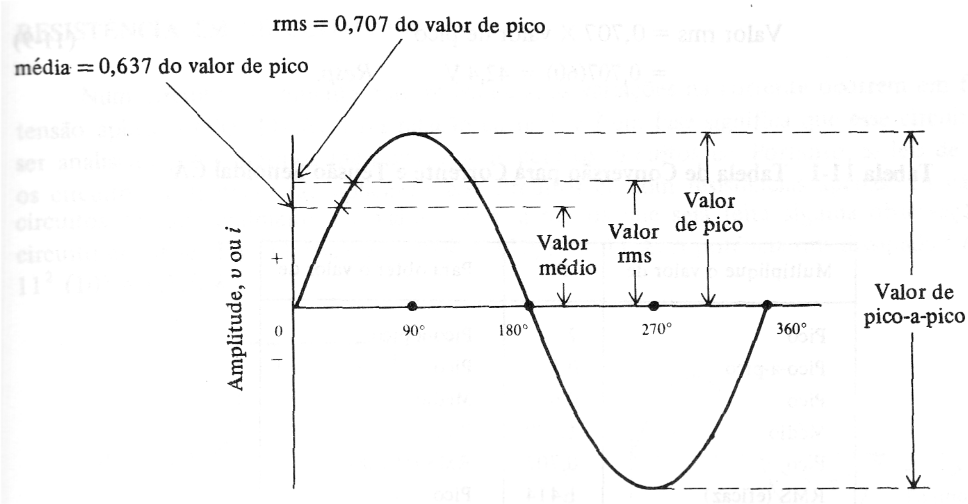


Figura 6: Valores de amplitude para uma onda sinusoidal ca.

Valor de pico: é o valor máximo V_M ou I_M. É aplicado tanto ao pico negativo como ao positivo. O valor de pico-a-pico também pode ser especificado e corresponde ao dobro do valor de pico quando os picos positivos e negativos são simétricos.

Valor médio: é o cociente entre a área e o tempo, sendo considerada a área contida entre a forma de onda correspondente e o eixo do tempo, num intervalo de tempo igual a um período. Áreas acima do eixo do tempo são (+) e abaixo são (-). As áreas devem ser **somadas algebricamente** para a obtenção da área total entre a forma de onda e o eixo de tempo para um período. **O valor médio é sempre considerado como calculado num período, salvo dito em contrário**. O valor médio de uma sinusóide é zero (num período as áreas (-) e (+) cancelam-se). Para algumas aplicações é utilizado o valor médio num semi-ciclo positivo = $\frac{2}{\pi}V_{pico} = 0.637 \times V_{pico}$.

Valor eficaz: corresponde à mesma quantidade de corrente ou tensão contínua capaz de produzir a mesma potência de aquecimento. Uma tensão alternada com um valor eficaz de 115 V, tem exactamente a mesma eficiência no aquecimento do filamento de uma lâmpada de incandescência que os 115 V provenientes de uma fonte de tensão cc fixa.

É usado na especificação de electrodomésticos, por exemplo. Um secador de 220 V é o seu valor eficaz.

Salvo dito em contrário todas as medidas das tensões e correntes sinusoidais são em valor eficaz. Por exemplo: a tensão de alimentação de 220 V quer dizer que a nossa tensão de alimentação tem um valor eficaz de 220 V. Assim, o seu valor de pico é de $V_{pico} = \sqrt{2}V_{eficaz} = 310$ V .

Procedimento para obter o valor eficaz de qualquer forma de onda ca periódica:

- Elevar ao quadrado a tensão ou corrente periódica (*square*).

- Encontrar a média dessa quadrática num período (*mean*).
- Encontrar a raiz quadrada dessa área (*root*).

RELAÇÕES DE FASE

O ângulo de fase entre 2 formas de onda da mesma frequência é a diferença angular num dado instante.

Por exemplo o ângulo de fase entre as ondas B e A é de 90º.

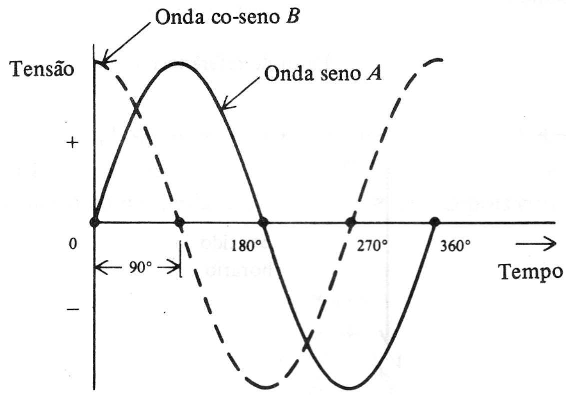


Figura 7: Formas de onda, onda B está adiantada da onda A de 90º.

Considere o instante para 0º < t < 90º.

- Onda B começa com o seu valor máximo e cai para zero em 90º.
- Onda A começa em zero e cresce até o seu valor máximo em 90º.
- Onda B atinge o seu valor máximo 90º à frente da onda A.
- Onda B está adiantada relativamente à onda A de 90º.
- As ondas B e A estão desfasadas de 90º.

Este ângulo de fase de 90º entre as ondas B e A é mantido durante o ciclo completo e todos os ciclos sucessivos.

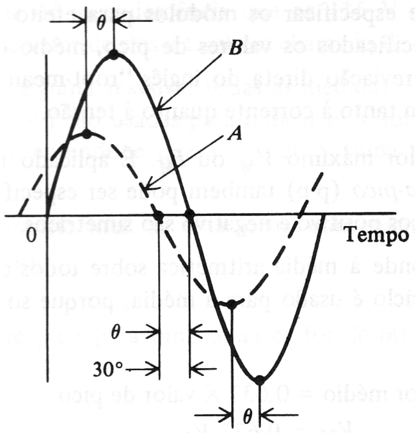
Em qualquer instante, a onda B passa pelo valor que a onda A terá 90º mais tarde.

A diferença de fases entre duas ondas sinusoidais pode ser encontrada pela diferença entre os ângulos de fase das duas, considerando que ambas tenham a forma seno ou coseno e que as amplitudes tenham o mesmo sinal – ambas positivas ou negativas. Além disso as duas sinusóides devem ter a mesma frequência.

Exemplo:

$$v_B = V_{pico}\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta) = V_{pico}\,\mathrm{sen}(2\pi f t + 0^\circ) = V_{pico}\,\mathrm{sen}(2\pi f t)$$

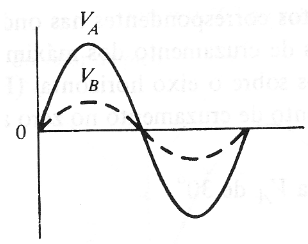
$$v_A = V_{pico}\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta) = V_{pico}\,\mathrm{sen}(2\pi f t + 30^\circ)$$



v_A está adiantada de 30º em relação a v_B

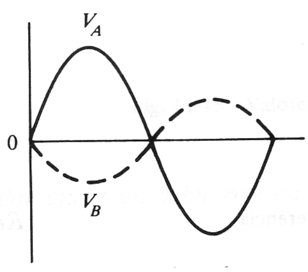
ou

v_B está atrasada de 30º em relação a v_A.



v_A está em fase com v_B

O ângulo de fase = 0º

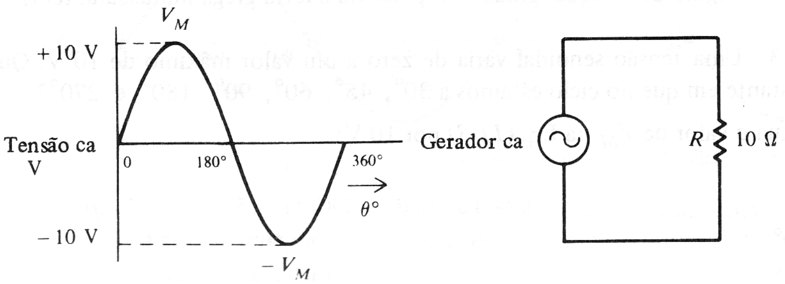


v_A está em oposição de fase com v_B

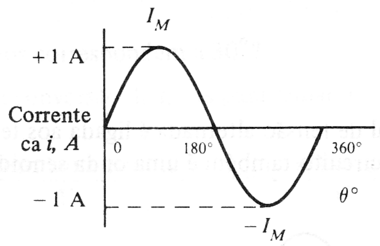
O ângulo de fase = 180º

RESPOSTA SINUSOIDAL DE UMA RESISTÊNCIA

$v = V_M \text{ sen}(\theta)$, o eixo horizontal está representado em graus.



$i = I_M \text{ sen}(\theta)$, porque pela lei de ohm $i = v/R \Rightarrow I_M = V_M/R$



Se: $v = V_M \text{ sen}(\omega t + \theta) \quad \Rightarrow \quad i = I_M \text{ sen}(\omega t + \theta) = \dfrac{V_M}{R} \text{sen}(\omega t + \theta)$

A potência instantânea dissipada numa resistência varia com o tempo porque a tensão e a corrente instantâneas variam com o tempo:

$$p = vi = [V_M \text{ sen}(\omega t + \theta)][I_M \text{ sen}(\omega t + \theta)] = V_M I_M \text{ sen}^2(\omega t + \theta)$$

potência de pico $\Rightarrow P_M = V_M I_M$, e ocorre sempre que $\text{sen}(\omega t + \theta) = \pm 1$.

- Potência instantânea = 0 W sempre que a tensão = 0 V e corrente = 0 A.

- Potência instantânea nunca é negativa: significa que uma resistência nunca fornece potência para um circuito, mas sim dissipa sob a forma de calor toda a potência que recebe.

Potência média fornecida a uma resistência:

$$P_{med} = \frac{V_M I_M}{2} = \frac{V_M{}^2}{2R} = \frac{I_M{}^2 R}{2}$$

RESPOSTA SINUSOIDAL DE UM CONDENSADOR

Se um condensador de C farads possui uma tensão $v = V_M \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$ sobre ele, a corrente no condensador é dada por:

$$i = C\frac{dv}{dt} = C\frac{d}{dt}\left[V_M \operatorname{sen}(\omega t + \theta)\right] = \omega C V_M \cos(\omega t + \theta)$$

Em que $\omega C V_M$ é a corrente de pico I_M.

$I_M = \omega C V_M$ e $\dfrac{V_M}{I_M} = \dfrac{1}{\omega C}$

Assim, um condensador possui um efeito limitador de corrente similar ao de uma resistência, em que $1/\omega C$ corresponde a *R*.

Pode definir-se **reactância capacitiva**, X_C, como $1/\omega C$.

Ou melhor,

$$X_C = -\frac{1}{\omega C}$$

X_C – reactância capacitiva, Ω

ω - $2\pi f$ – frequência angular, rad

C – capacidade do condensador, F

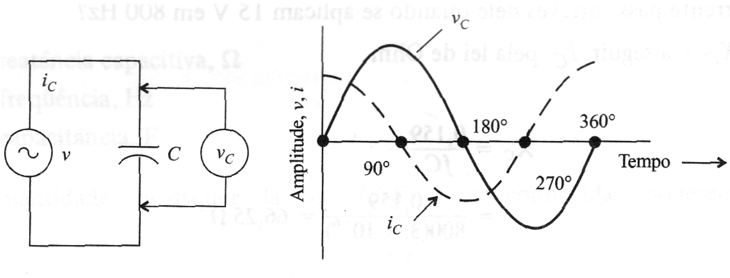
O sinal **negativo**, refere-se ao *deslocamento de fase*.

Sendo $1/\omega C$ inversamente proporcional à frequência, quanto maior for a frequência, maior a corrente, para a mesma tensão de pico.

- Para sinusóides de frequência muito alta o condensador é quase um curto-circuito.
- Para sinusóides de frequência muito baixa, próxima de 0 Hz, o condensador é um circuito aberto.

A partir da comparação entre sinusóides da tensão e corrente num condensador, pode observar-se que:

- a corrente está adiantada de 90º em relação à tensão
- ou a tensão está atrasada de 90º em relação à corrente



(*a*) Diagrama esquemático

(*b*) Diagrama de tempo, i_C está 90° adiante de v_c

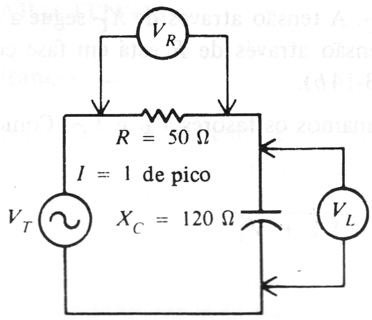
A potência instantânea absorvida por um condensador é:

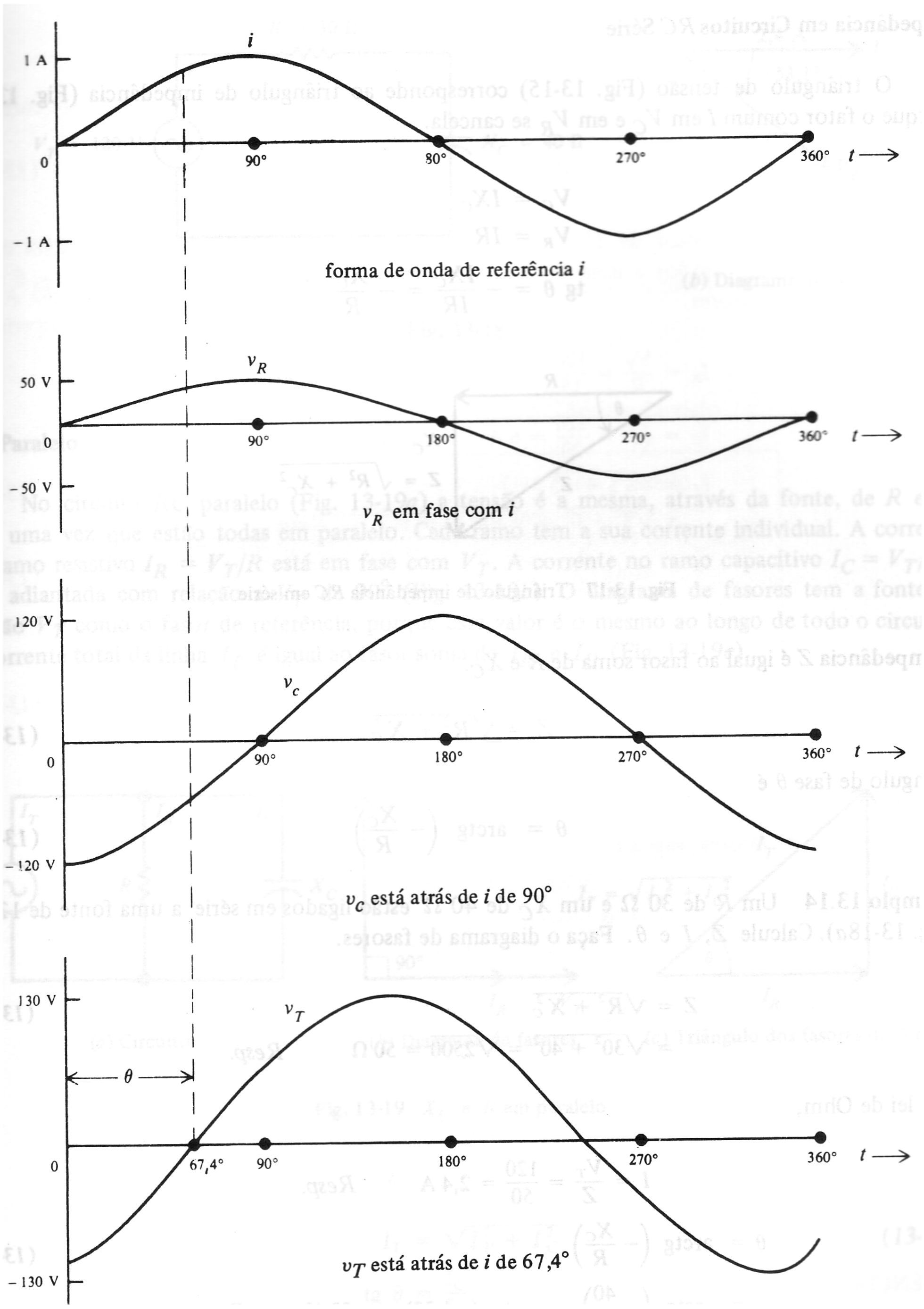
$$p = vi = [V_M \text{ sen}(\omega t + \theta)][I_M \cos(\omega t + \theta)] = \frac{V_M I_M}{2} \text{sen}(2\omega t + 2\theta)$$

A potência instantânea é sinusoidal, possui o dobro da frequência da tensão ou da corrente e possui um valor médio = 0 W.

- Um condensador absorve potência média = 0
- Num período um condensador fornece apenas a energia que recebe.

Exemplo: RC




i
1 A
0
-1 A
90°
80°
270°
360°
t ⟶
forma de onda de referência i
v_R
50 V
0
-50 V
90°
180°
270°
360°
t ⟶
v_R em fase com i
v_c
120 V
0
-120 V
90°
180°
270°
360°
t ⟶
v_c está atrás de i de 90°
v_T
130 V
0
-130 V
θ
67,4°
90°
180°
270°
360°
t ⟶
v_T está atrás de i de 67,4°