

Método do lugar de raízes

Licenciatura em Engenharia Electrónica Industrial
Disciplina de Controlo Automático 2

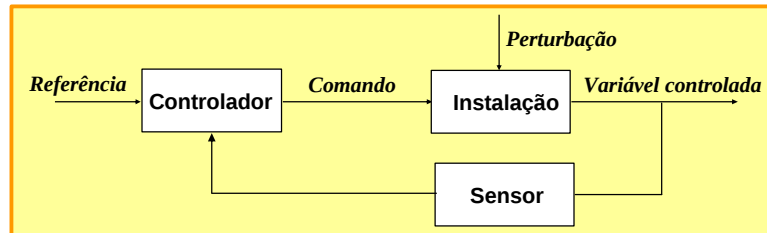
PAULO GARRIDO

Objectivos:

- *Estabelecer um método de análise da estabilidade de sistemas realimentados*, quando um dos seus parâmetros varia, através do lugar geométrico desenhado pelos seus pólos.
- Para tal:
 - i. Estabelecer um ***quadro de referência*** para a análise;
 - ii. Estabelecer a ***ideia do método*** a partir da noção de lugar geométrico dos pólos;
 - iii. Estabelecer ***propriedades do lugar de raízes*** que servirão de base à sua construção.
 - iv. Estabelecer uma ***sequência de construção*** do lugar.

Quadro de referência para a análise (I)

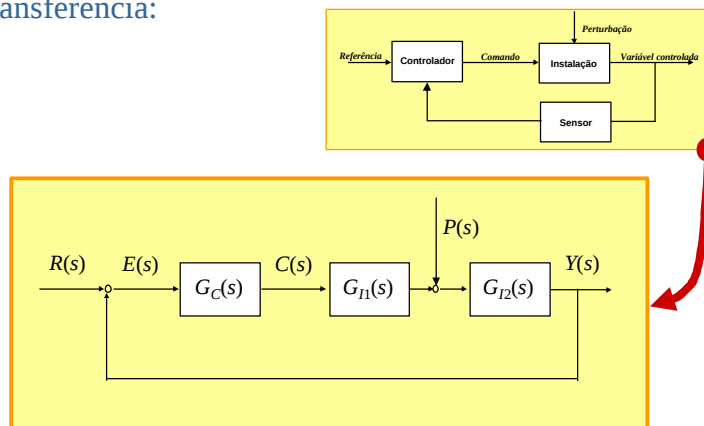
- Consideramos um sistema de controlo 'feedback' de uma instalação afectada por uma perturbação:



- Nota 1: consideramos o 'Actuador' inserido na 'Instalação'.
- Nota 2: Se o actuador for descrito por um modelo estático, poderá, em alternativa, ser considerado como inserido no 'Controlador'. Neste caso a variável 'Comando' será, de facto, a variável 'Manipulação'.

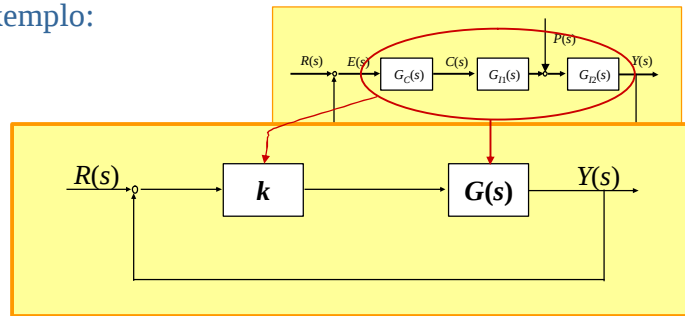
Quadro de referência para a análise (II)

- Estabelecemos o seu modelo em termos de funções de transferência:



Quadro de referência para a análise (III)

- A partir do modelo anterior estabelecemos um novo modelo com realimentação unitária e uma entrada. Exemplo:

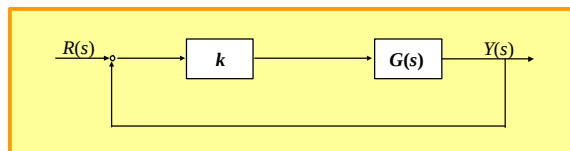


$$kG(s) = G_c(s)G_{I1}(s)G_{I2}(s)$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

A ideia do método (I)

- Dado o sistema na forma:



- A sua função de transferência $Y(s)/R(s)$ é:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)} \quad \text{ou} \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k \frac{N(s)}{D(s)}}{1 + k \frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{kN(s)}{D(s) + kN(s)}$$

A ideia do método (II)

- De: $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{kG(s)}{1+kG(s)}$ ou $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k \frac{N(s)}{D(s)}}{1+k \frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{kN(s)}{D(s)+kN(s)}$
- Segue-se que os pólos do sistema em malha fechada são as raízes da equação - dita *equação característica do sistema*:

$$1 + kG(s) = 0$$

- Que também se pode escrever como:

$$D(s) + kN(s) = 0$$

A ideia do método (III)

- Considerando a equação característica de $Y(s)/R(s)$:

$$D(s) + kN(s) = 0$$

- Torna-se evidente que o valor dos pólos do sistema depende do valor de k .
- Segue-se que se fizermos variar k de 0 a $+\infty$, os pólos do sistema realimentado tomarão todos os valores possíveis consistentes com a realimentação negativa (se k fosse negativo teríamos realimentação positiva!).

A ideia do método (IV)

- Tomemos então o conjunto dos pontos (ou lugar geométrico) no plano s , ocupado pelos pólos do sistema com equação característica

$$D(s) + kN(s) = 0$$

quando k varia de 0 a $+\infty$.

- Este conjunto é chamado o *lugar de raízes* do sistema.
- A importância do lugar de raízes de um sistema realimentado, advém de podermos obter muita informação sobre a sua estabilidade por inspeção visual do lugar.

Construção do lugar de raízes

- Exemplo por via analítica (I)

- Uma das possibilidades para determinar o lugar de raízes é calcular analiticamente a expressão dos pólos em função de k .

- Vejamos um exemplo. Seja: $G(s) = \frac{1}{s+a} \quad \left(a = \frac{1}{T} \right)$

- Então a equação característica do sistema realimentado é:

$$(s+a) + k = 0 \quad \text{ou} \quad s + a + k = 0$$

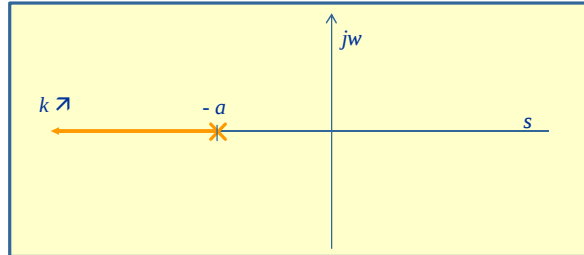
- E a expressão do único pólo vem:

$$s = -(a+k)$$

Construção do lugar de raízes

- Exemplo por via analítica (II)

- O lugar de raízes tem então o seguinte aspecto:



- O lugar de raízes é uma semi-recta que começa em $-a$ quando $k = 0$ e se dirige para $-\infty$. Portanto:
 - o sistema é estável para qualquer valor de k (positivo).
 - a magnitude do pólo torna-se cada vez maior e logo a duração do modo próprio cada vez menor, à medida que k aumenta.

Construção do lugar de raízes pelas suas propriedades

- A expressão analítica das raízes da equação característica quando $G(s)$ é um sistema de segunda ordem já não é simples.

- Que dizer então de (!):
$$G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}$$

- Claramente necessitamos de um método alternativo!

- O método comumente usado para avaliação e traçado gráfico de um lugar de raízes, utiliza um **conjunto de propriedades** do lugar, que estudaremos em seguida.

Condições do módulo e do argumento

- A equação característica pode escrever-se: $1 + kG(s) = 0$
- Claramente, a partir dela podemos pôr: $G(s) = -1/k$
- A última expressão diz-nos que os pólos do sistema em malha fechada, são, para cada valor de k , exactamente aqueles valores de s que fazem $G(s) = -1/k$.
- Mas $G(s)$ e $-1/k$ são números complexos. Então também se deve verificar, para qualquer pólo da equação característica:

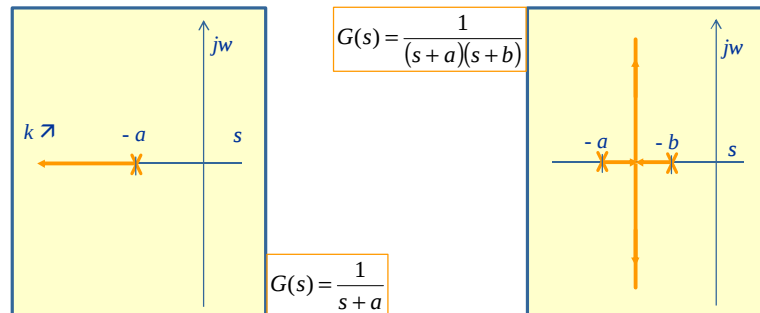
$ G(s) = 1/k$	Condição do módulo	$\arg(G(s)) = p$	Condição do argumento
----------------	--------------------	------------------	-----------------------

Propriedades do lugar de raízes

- As condições do módulo e do argumento permitem deduzir um conjunto de propriedades do lugar de raízes.
- Seguidamente, apresentar-se-ão as propriedades de uso mais comum na construção de um lugar.

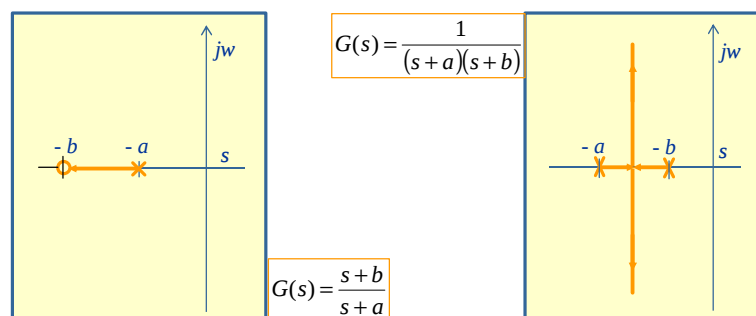
Propriedades do lugar de raízes - 1

- O número de ramos do lugar de raízes iguala n_p , o número de pólos de $G(s)$.



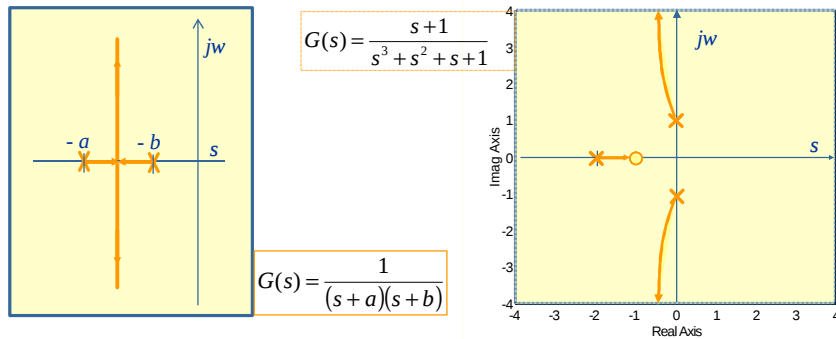
Propriedades do lugar de raízes - 2

- Os ramos começam nos pólos e terminam nos zeros (finitos ou infinitos) de $G(s)$.



Propriedades do lugar de raízes - 3

- Seja n_z o número de zeros de $G(s)$ e $e = n_p - n_z$ o excesso pólo-zero de $G(s)$. Então o número de ramos que vão para ∞ iguala e .



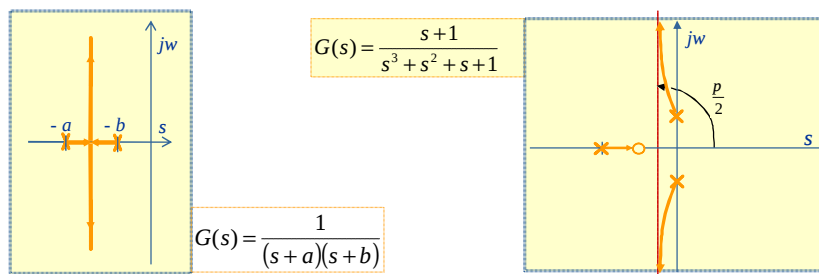
Paulo Garrido / Método do lugar de raízes

16

Propriedades do lugar de raízes - 4

- Os ramos que vão para ∞ , fazem-no segundo assíptotas cujos ângulos f_q com o semi-eixo real positivo são dados por:

$$f_q = \frac{2q+1}{e} 180^\circ \quad q = 0, 1, \dots, (n_p - n_z - 1)$$



Paulo Garrido / Método do lugar de raízes

17

Propriedades do lugar de raízes - 5

- O centróide, s_0 , das assíntotas é dado pela expressão:

$$s_0 = \frac{\sum (\text{pólos de } G(s)) - \sum (\text{zeros de } G(s))}{e}$$

- Com e sendo o excesso pólo-zero.

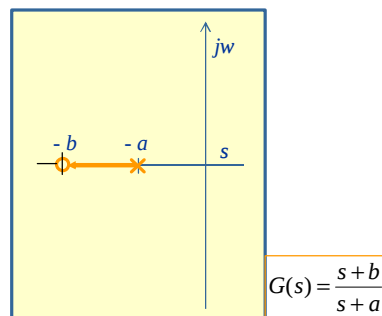
Propriedades do lugar de raízes - 6

- Os pontos de dispersão ou convergência de ramos no eixo real correspondem a mínimos ou máximos de k e podem ser encontrados, resolvendo:

$$\frac{dk}{ds} = - \frac{d\left(-\frac{1}{G(s)}\right)}{ds} = 0$$

Propriedades do lugar de raízes - 7

- O lugar de raízes no eixo real tem à sua direita um número ímpar de pólos e zeros de $G(s)$.



Propriedades do lugar de raízes - 8

- O lugar de raízes é simétrico em relação ao eixo real.

Sequência de construção

1. Marcar os pólos e o zeros de $G(s)$.
2. Marcar o lugar no eixo real.
3. Em cada secção do lugar no eixo real, marcar o sentido de deslocamento dos pólos, quando k aumenta.
4. Traçar as assímtotas.
5. Traçar as secções dos ramos fora do eixo real e, em cada um, o sentido do deslocamento dos pólos.
6. Se necessário marcar os pontos de convergência e divergência dos ramos no eixo real.