Erro em regime permanente de sistemas de controlo

Licenciatura em Engenharia Electrónica Industrial
Disciplina de Controlo Automático 2

PAULO GARRIDO

Objectivos:

- **Analisar o erro em regime permanente**, em sistemas de controlo com realimentação negativa, provocado por mudanças na variável de referência ou da variável de perturbação. Para tal:
  i. Estabelecer a **motivação da análise**;
  ii. Estabelecer um **quadro de referência** para a análise;
  iii. Rever o **teorema do limite final**;
  iv. Estabelecer as noções de **ganho em regime permanente** e **tipo** de um sistema;
  v. Estabelecer a **expressão geral do erro** no quadro de referência considerado.
- Estabelecer **resultados específicos** da análise para evoluções padrão e diferentes configurações de sistemas.

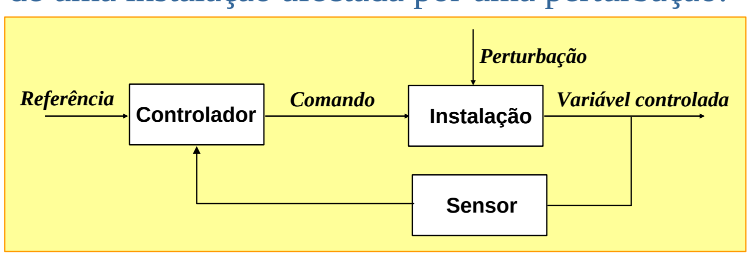
Motivação para a análise

- No estudo do controlo proporcional, verificamos que:
  - na simulação de vários sistemas de controlo a variável controlada não estabilizava no mesmo valor da variável de referência. Existia assim um erro (ou 'offset') que se mantinha permanentemente (isto é, quando $t \to \infty$). Verificou-se também que o valor do erro estava relacionado com o valor do ganho proporcional K_p;
  - num outro caso, no entanto, não se verificou a existência de tal erro.

- Porque o objectivo do Controlo é tornar a variável controlada o mais possível igual à variável de referência, *este comportamento tem de ser compreendido*, de forma a termos um método que nos permita *prever e minimizar tal erro ou 'offset'*.

Quadro de referência para a análise (I)

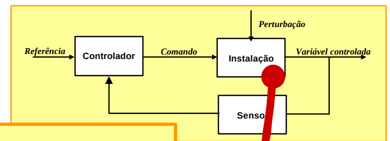
- Consideramos um sistema de controlo 'feedback' de uma instalação afectada por uma perturbação:

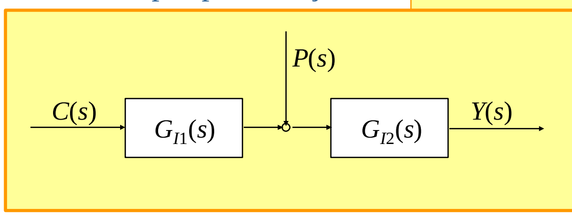


- Nota 1: consideramos o 'Actuador' inserido na 'Instalação'.
- Nota 2: Se o actuador for descrito por um modelo estático, poderá, em alternativa, ser considerado como inserido no 'Controlador'. Neste caso a variável 'Comando' será, de facto, a variável 'Manipulação'.

Quadro de referência para a análise (II)

- Modelo da instalação afectada por perturbação:

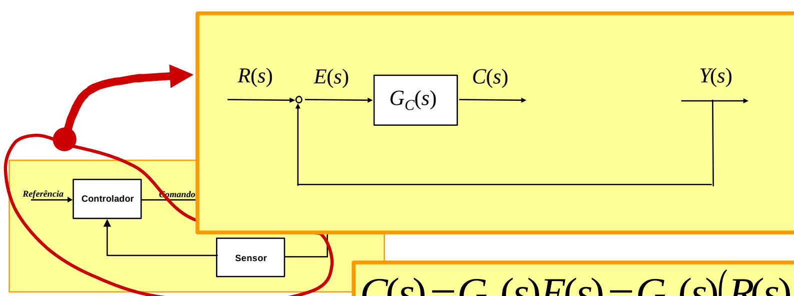




$$Y(s) = G_{I2}(s)\big(P(s) + G_{I1}(s)C(s)\big)$$

Quadro de referência para a análise (III)

- Modelo do controlador e do sensor:

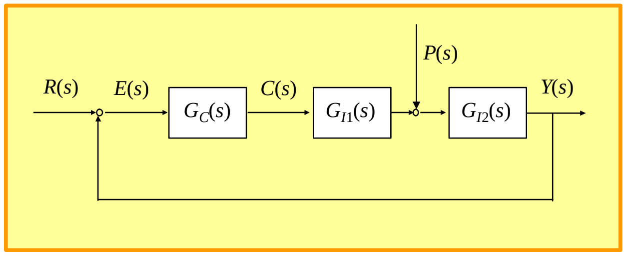


$$C(s) = G_C(s)E(s) = G_C(s)\big(R(s) - Y(s)\big)$$

- Nota: se o sensor tiver um ganho k_S diferente de 1, considerar-se-á $G_C(s) = k_S\, G_C{}^*(s)$ em que $G_C{}^*(s)$ é a função de transferência da lei de controlo realmente implementada no controlador.

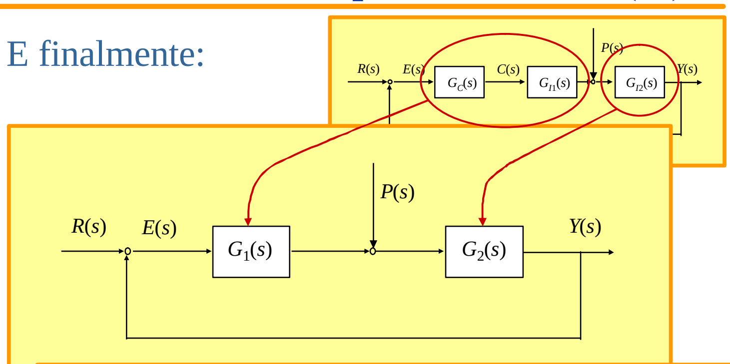
Quadro de referência para a análise (IV)

- Nas condições anteriores o modelo do sistema de controlo fica:



Quadro de referência para a análise (V)

- E finalmente:



$$E(s) = \frac{1}{1 + G_1 G_2(s)} R(s) - \frac{G_2(s)}{1 + G_1 G_2(s)} P(s)$$

Teorema do limite final

- Permite substituir o cálculo do limite de uma função temporal pelo da sua transformada:

Se $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$ e $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existe, então

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

- Usaremos o teorema para obter expressões para o erro em regime permanente:

$$\text{erro em regime permanente} = e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

Ganho em regime permanente e tipos de sistemas

- Dada uma função de transferência de um sistema:

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

- Podemos sempre reexpressá-la na forma:

$$G(s) = \frac{K_{rp}}{s^t} \frac{1 + b_1^{'} s + b_2^{'} s^2 + \ldots}{1 + a_1^{'} s + a_2^{'} s^2 + \ldots}$$

– K_{rp} é o ganho em regime permanente.
– t é o tipo do sistema.

Exemplos de cálculo de ganho e tipo

$$i)\ \frac{1}{Ts+1} = \frac{1}{s^0}\frac{1}{Ts+1}$$

Ganho:1 Tipo:0

$$ii)\ \frac{s}{Ts+1} = \frac{1}{s^{-1}}\frac{1}{1+sT}$$

Ganho:1 Tipo:-1

$$iii)\ \frac{2}{s^2+3s} = \frac{(2/3)}{s}\frac{1}{1+(1/3)s}$$

Ganho:2/3 Tipo:1

$$iv)\ \frac{s+2}{s^3+5s} = ?$$

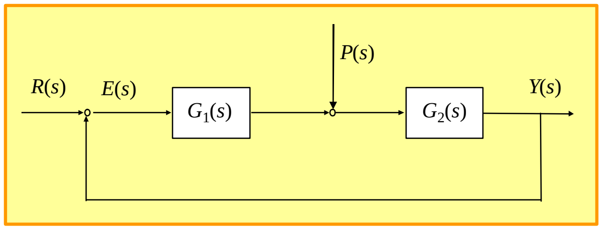
Ganho:? Tipo:?

A importância dos parâmetros *ganho* e *tipo*...

… advém de determinarem o comportamento de G(s) quando s→0:

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0} G(s) &= \lim_{s\to 0}\left(\frac{K_{rp}}{s^t}\frac{1+b_1^{'}s+b_2^{'}s^2+\dots}{1+a_1^{'}s+a_2^{'}s^2+\dots}\right)= \\ &= \lim_{s\to 0}\left(\frac{K_{rp}}{s^t}\right)\lim_{s\to 0}\left(\frac{1+b_1^{'}s+b_2^{'}s^2+\dots}{1+a_1^{'}s+a_2^{'}s^2+\dots}\right)= \\ &= \lim_{s\to 0}\left(\frac{K_{rp}}{s^t}\right)\times 1 \\ &= \lim_{s\to 0}\left(\frac{K_{rp}}{s^t}\right)\end{aligned}$$

A expressão do erro em regime permanente do sistema considerado...



$$G_1(s) = \frac{K_{rp1}}{s^{t1}} G_1^{'}(s) \qquad G_1^{'}(s) = \frac{1 + b_{1,1}^{'} s + b_{2,1}^{'} s + \ldots}{1 + a_{1,1}^{'} s + a_{2,1}^{'} s + \ldots}$$

…escrevendo...

$$G_2(s) = \frac{K_{rp2}}{s^{t2}} G_2^{'}(s) \qquad G_2^{'}(s) = \frac{1 + b_{1,2}^{'} s + b_{2,2}^{'} s + \ldots}{1 + a_{1,2}^{'} s + a_{2,2}^{'} s + \ldots}$$

…vem então:

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} s\, E(s) =$$

$$= \lim_{s \to 0} s \left(\frac{1}{1 + \frac{K_{rp1}}{s^{t1}} G_1^{'}(s) \frac{K_{rp2}}{s^{t2}} G_2^{'}(s)} R(s) - \frac{\frac{K_{rp2}}{s^{t2}} G_2^{'}(s)}{1 + \frac{K_{rp1}}{s^{t1}} G_1^{'}(s) \frac{K_{rp2}}{s^{t2}} G_2^{'}(s)} P(s) \right) =$$

$$= \lim_{s \to 0} s \left(\frac{1}{1 + \frac{K_{rp1}}{s^{t1}} \frac{K_{rp2}}{s^{t2}}} R(s) - \frac{\frac{K_{rp2}}{s^{t2}}}{1 + \frac{K_{rp1}}{s^{t1}} \frac{K_{rp2}}{s^{t2}}} P(s) \right) =$$

$$= \lim_{s \to 0} \left(\frac{s^{t1} s^{t2}}{s^{t1} s^{t2} + K_{rp1} K_{rp2}} s\, R(s) - \frac{K_{rp2} s^{t1}}{s^{t1} s^{t2} + K_{rp1} K_{rp2}} s\, P(s) \right)$$

Resultados específicos para evoluções padrão e diferentes configurações de sistemas

- Evoluções a considerar: $r(t)$ = $\mathbf{h}(t)$ (impulso de Heaviside)
  $p(t)$ = $\mathbf{h}(t)$ (impulso de Heaviside)
  $r(t)$ = $\mathbf{v}(t)$ (rampa unitária)

- Configurações a considerar:

Tipo de G_1	Tipo de G_2
0	**0**
0	**1**
1	**0**
1	**1**

Exercícios

- Calcular a expressão do erro para os casos referidos, em formato tabular, usando a expressão geral do erro anterior. Exemplo de resultados para a primeira linha da tabela:

Tipo de G_1	Tipo de G_2	Soma de tipos	*e*(¥) para $r(t)$=h(t)	*e*(¥) para $p(t)$=h(t)	*e*(¥) para $r(t)$=v(t)
0	0	0	$\dfrac{1}{1+K_{rp1}K_{rp2}}$	$-\dfrac{K_{rp2}}{1+K_{rp1}K_{rp2}}$	∞

Configuração 1

Tipo de G_1	Tipo de G_2	Soma de tipos	e(¥) para $r(t)$=h(t)	e(¥) para $p(t)$=h(t)	e(¥) para $r(t)$=v(t)
0	0	0	$\dfrac{1}{1+K_{rp1}K_{rp2}}$	$-\dfrac{K_{rp2}}{1+K_{rp1}K_{rp2}}$	∞

- O sistema de controlo apresenta um erro finito e não-nulo para as entradas em degrau. O erro diminui com o aumento de K_{rp1}.
- Para uma referência em rampa unitária - típica da situação de servocomando - o sistema apresenta um erro em regime permanente infinito.

Configuração 2

Tipo de G_1	Tipo de G_2	Soma de tipos	e(¥) para $r(t)$=h(t)	e(¥) para $p(t)$=h(t)	e(¥) para $r(t)$=v(t)
0	1	1	0	$-\dfrac{1}{K_{rp1}}$	$\dfrac{1}{K_{rp1}K_{rp2}}$

- Com o aumento do tipo de G_2, o sistema passa a ter erro nulo a referências em degrau.
- Os erros em regime permanente para os outros dois casos, são finitos, não-nulos e inversamente proporcionais a K_{rp1}.

Configuração 3

Tipo de G_1	Tipo de G_2	Soma de tipos	*e*(¥) para *r*(*t*)=h(*t*)	*e*(¥) para *p*(*t*)=h(*t*)	*e*(¥) para *r*(*t*)=v(*t*)
1	0	1	0	0	$\dfrac{1}{K_{rp1}K_{rp2}}$

- Com o aumento do tipo de G_1, o sistema passa a ter erro nulo a referências ou perturbações em degrau.
- O erro em regime permanente para uma referência em rampa, é finito, não-nulo e inversamente proporcional a K_{rp1}.

Configuração 4

Tipo de G_1	Tipo de G_2	Soma de tipos	*e*(¥) para *r*(t)=h(*t*)	*e*(¥) para *p*(t)=h(*t*)	*e*(¥) para *r*(t)=v(*t*)
1	1	2	0	0	0

- Se G_1 e G_2 forem ambos do tipo 1, o sistema apresenta erro nulo para todas as entradas consideradas.

Conclusões do estudo dos casos específicos

- Para eliminar o erro em regime permanente quando a ***referência é constante*** é necessário que a soma dos tipos de G_1 e G_2 seja pelo menos 1.
- Para eliminar o erro em regime permanente quando a ***perturbação é constante*** é necessário que o tipo de G_1 seja pelo menos 1.
- Para eliminar o erro em regime permanente quando o sistema funciona em regime de servocomando de uma ***referência em rampa*** é necessário que a soma dos tipos de G_1 e G_2 seja pelo menos 2.