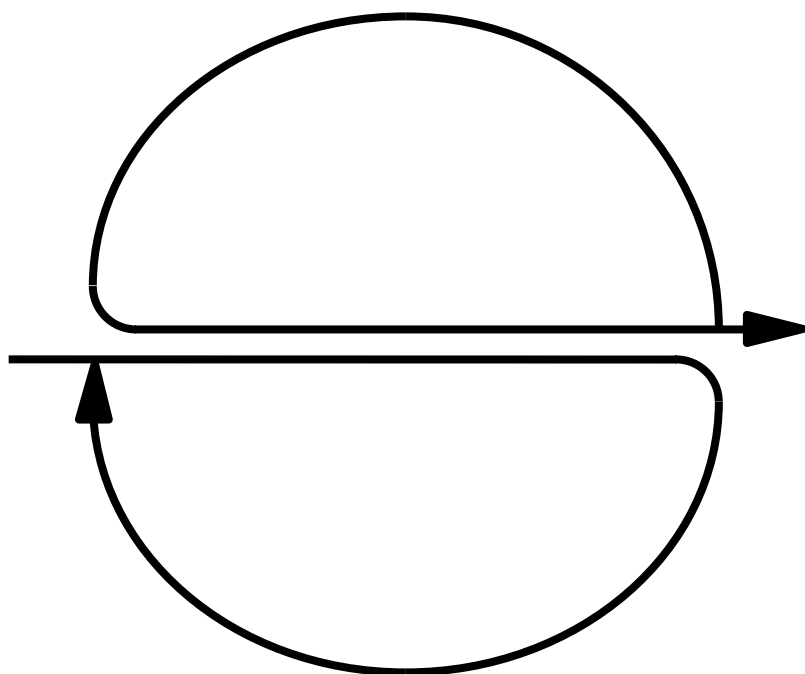


Elementos de Teoria de Sistemas

A – Números e Funções Complexas



PAULO GARRIDO

Escola de Engenharia da Universidade do Minho

Elementos de Teoria de Sistemas/ A Números e Funções Complexas /
© 2003-04 Paulo Garrido – Universidade do Minho

Informação de direitos de autor.

Esta publicação, incluindo a faculdade de impressão, destina-se aos alunos do cursos de engenharia da Universidade do Minho.

Pode ser utilizada por outras pessoas para fins exclusivos de aprendizagem, desde que o documento seja integralmente mantido. Qualquer outra utilização sem autorização do autor é ilícita. Este pode ser consultado em pgarrido@dei.uminho.pt

APÊNDICE A

NÚMEROS E FUNÇÕES COMPLEXAS

1. Números Complexos

Um número complexo s é uma entidade matemática que se pode representar por um par ordenado de números reais a e b , nas seguintes condições:

$$\begin{aligned} s &\triangleq (a, b) & a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \\ (a, b) &= (c, d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d \\ (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b)(c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Exemplo A.1

$$\begin{aligned} (2^2, 1) &= (4, \sin^2(x) + \cos^2(x)) \\ (5, 5) + (-5, -5) &= (0, 0) \\ (1, 2)(0.2, -0.4) &= (1, 0) \end{aligned}$$

A esta forma de representação de números complexos chamaremos *cartesiana*.

Existência de elementos identidade.

Os números $(0, 0)$ e $(1, 0)$ são os elementos neutros ou elementos identidade respectivamente da adição e da multiplicação.

Existência de simétrico e inverso.

O número $(-a, -b)$ é o simétrico de (a, b) . Para todo o $s \neq (0, 0)$, o seu inverso existe. O inverso de (a, b) representa-se por $(a, b)^{-1}$ ou $1/(a, b)$ e tem-se que:

$$\frac{1}{(a, b)} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right). \quad (\text{A.2})$$

Componentes de um número complexo

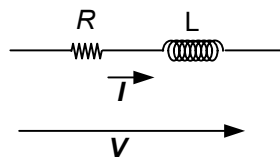
O primeiro componente do par $s = (a, b)$ diz-se a *parte real* do número complexo. A segunda componente diz-se a *parte imaginária* do número complexo. As funções $\text{Re}(s)$ e $\text{Im}(s)$ são entendidas retornar, respectivamente, a primeira e segunda componente de s . Podem ser definidas por:

$$\begin{aligned} s = (a, b) &\rightarrow \text{Re}(s) = a \\ s = (a, b) &\rightarrow \text{Im}(s) = b \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

O estudante não deve atribuir importância às designações de ‘real’ e ‘imaginária’ que têm razões históricas internas ao desenvolvimento da Matemática. Em Electrotecnia, os números complexos são usados, por exemplo, para representar o valor de *impedâncias*. Os valores das duas componentes de uma impedância podem ser medidas ou determinadas, a parte ‘imaginária’ tendo um valor tão real como o da parte ‘real’.

Exemplo A.2: Impedância de um circuito RL

O circuito,



com I e V corrente e tensão sinusoidal de frequência angular ω , tem por impedância $Z = (R, \omega L)$. A primeira componente – *resistência* – de Z tem o valor R e a segunda componente – *reactância* – tem o valor ωL . A resistência pode ser determinada aplicando ao circuito uma tensão constante, medindo a intensidade de corrente resultante e dividindo o valor da tensão pelo da corrente. Os instrumentos que realizam esta determinação (a que comunmente se chama medida da resistência) são os ohmímetros. Se o valor de R for diferente de 0, o valor de ωL pode ser determinado ou medido, aplicando ao circuito uma tensão sinusoidal, medindo o ângulo ϕ de desvio da corrente sinusoidal resultante em relação à tensão e multiplicando R pela tangente de $-\phi$.

Representação geométrica

Entendendo-se os números complexos como pares de números reais, pode usar-se o plano cartesiano para representar números complexos como pontos. O número complexo $s = (\sigma, \omega)$ representa-se como um ponto de abcissa σ e de ordenada ω .

Exemplo A.3

Os números complexos referidos até agora representar-se-ão como na Figura A.1. Estão também representados os números $(0, 1), (-1, 0), (0, -1)$.

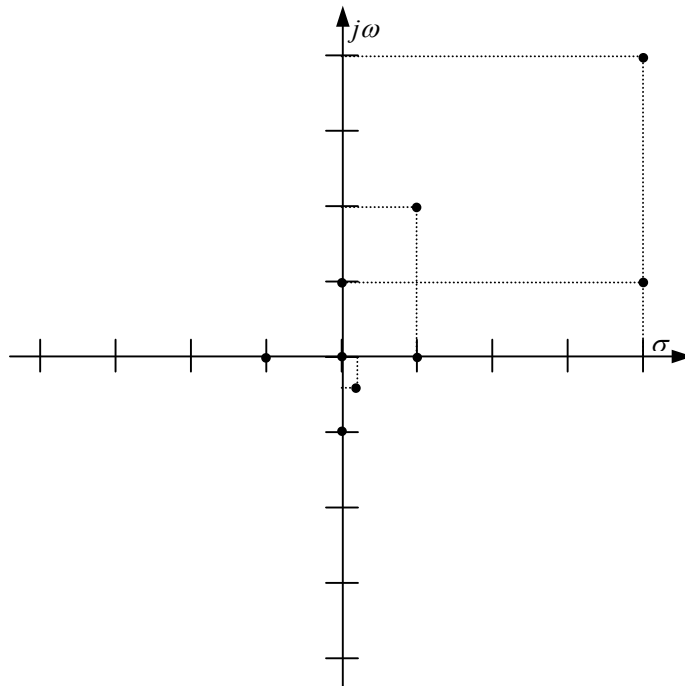


Figura A.1 Representação de números complexos no plano com um referencial cartesiano. É também usual referir esta representação como representação no plano de Argand ou no plano complexo. Em Electrotecnia diz-se também plano s e designa-se o eixo das abcissas por σ e o eixo das ordenadas por $j\omega$.

O conjunto dos números complexos designa-se por $\mathbb{C}$. O subconjunto de $\mathbb{C}$ que contém todos os números complexos da forma $s = (a, 0)$ designa-se por $\mathbb{C}_0$. A função $f(a) = (a, 0)$ tem domínio em $\mathbb{R}$ e contradomínio em $\mathbb{C}_0$. Esta função estabelece uma correspondência de 1 para 1 entre os números reais e os números complexos com segunda componente nula. Tem-se ainda que:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \quad \text{e} \quad (a, 0)(b, 0) = (ab, 0). \quad (\text{A.4})$$

Ou seja, a adição e a multiplicação em $\mathbb{C}_0$ preservam a correspondência de 1 para 1 acima. Estas razões sugerem que se convencie escrever a em vez de $(a, 0)$, para simplicidade de notação. O que se faz usualmente, mas cujo significado importa ter em conta: sempre que numa expressão envolvendo números complexos aparece um número a , tome-se atenção se significa um número em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{C}_0$.

O número complexo j ou unidade imaginária

O número complexo $(0, 1)$ representa-se habitualmente em Electrotecnia por j . Frequentemente é chamado de unidade imaginária. Tem propriedades de interesse. Por exemplo:

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$$

Esta propriedade e o uso da notação simplificada acima explica porque às vezes se encontram expressões que podem entender-se como absurdas, por exemplo:

$$j = +\sqrt{-1}.$$

Se na expressão acima se ler ‘-1’ como o número real -1, a expressão é absurda porque a função $+\sqrt{(\cdot)}$ não é definida para números negativos (a raiz quadrada positiva de -1 não existe). Para que a expressão tenha significado, é preciso ler ‘-1’ como o número complexo $(-1, 0)$. Ou seja

$$j = +\sqrt{(-1, 0)}.$$

Outra propriedade de interesse é a seguinte

$$j(\omega, 0) = (0, 1)(\omega, 0) = (0, \omega). \quad (\text{A.5})$$

A multiplicação por j de um número representado no eixo real corresponde geometricamente a rodar o ponto que o representa de um arco de 90° em torno da origem. Esta propriedade generaliza-se para qualquer complexo s , não apenas os pertencentes a $\mathbb{C}_0$:

$$js = (0, 1)(\sigma, \omega) = (0 - \omega, \sigma - 0) = (-\omega, \sigma) \quad (\text{A.6})$$

Pode verificar-se que (σ, ω) e $(-\omega, \sigma)$ são os extremos de um arco de circunferência de 90° em torno da origem. Como tal os segmentos de recta definidos por cada um dos números e a origem são perpendiculares.

A representação $\sigma + j\omega$

A propriedade (A.5) permite escrever:

$$(\sigma, \omega) = (\sigma, 0) + (0, \omega) = (\sigma, 0) + (0, 1)(\omega, 0) = (\sigma, 0) + j(\omega, 0). \quad (\text{A.7})$$

Utilizando a notação simplificada descrita acima, isto é, $\sigma = (\sigma, 0)$ e $\omega = (\omega, 0)$, pode então escrever-se

$$(\sigma, \omega) = \sigma + j\omega \quad (\text{A.8})$$

A representação polar $r \angle \theta$

Um número complexo pode ser entendido como instruções para achar um ponto no plano. Suponha-se uma pessoa situada na origem do plano s . A pessoa deve deslocar-se até ao ponto que representa o número (σ, ω) ou $\sigma + j\omega$. Para o fazer desloca-se de σ no eixo das abcissas e a seguir de ω paralelamente ao eixo das ordenadas.

A pessoa pode fazer tal com outros movimentos. Pode, colocando-se inicialmente de forma a ‘olhar’ ao longo do eixo das abcissas, rodar de um ângulo θ e a seguir deslocar-se de uma distância r . Veja-se a Figura A.2.

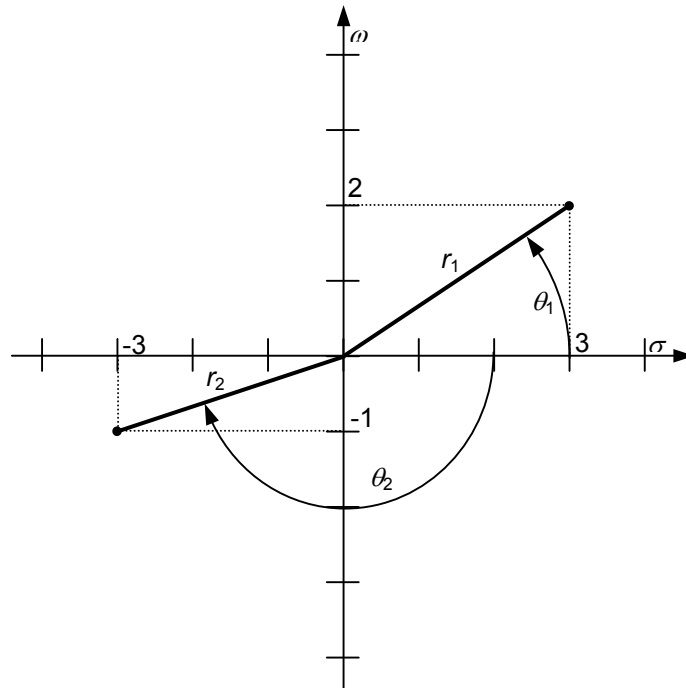


Figura A.2 Representação polar de números complexos. Nos exemplos representados tem-se $r_1 = \sqrt{3^2 + 2^2}$, $\theta_1 = \text{atan}(2/3)$, $r_2 = \sqrt{3^2 + 1^2}$, $\theta_2 = \text{atan}(-1/-3)$

Assim, um número complexo (σ, ω) ou $\sigma + j\omega$ pode alternativamente representar-se pelo par $r \angle \theta$, dito representação na forma *polar*, se

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \\ \theta &= \text{atan} \frac{\omega}{\sigma} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Aos valores r e θ chamam-se respectivamente o *módulo* e o *argumento* do número complexo. As funções $|s|$ e $\arg(s)$ são definidas como retornando o módulo e o argumento do número complexo s .

Inversamente, se um número complexo estiver representado na forma polar $r \angle \theta$, ele pode alternativamente ser representado por (σ, ω) ou $\sigma + j\omega$ se

$$\begin{aligned} \sigma &= r \cos \theta \\ \omega &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

As equações (A.9) definem a transformação da representação cartesiana na representação polar. As equações (A.10) definem a transformação inversa.

Função exponencial de um número complexo

Como definir a função exponencial de um número complexo s ? Recorrendo à representação cartesiana podemos começar por escrever

$$e^s = e^{\sigma + j\omega}.$$

Uma propriedade que certamente se pretende é a da validade da lei dos expoentes, isto é:

$$e^{\sigma + j\omega} = e^{\sigma} e^{j\omega}$$

A interpretação de e^{σ} não oferece dificuldades: é um número real ou um número complexo em $\mathbb{C}_0$. A questão é: como interpretar $e^{j\omega}$ de forma a que as propriedades da exponenciação em $\mathbb{R}$ sejam transpostas para $\mathbb{C}$? A resposta foi encontrada por Euler que definiu

$$e^{j\omega} = (\cos \omega, \sin \omega) = \cos \omega + j \sin \omega. \quad (\text{A.11})$$

Esta definição tem as importantes propriedades:

$$\begin{aligned} \forall \omega, |e^{j\omega}| &= \sqrt{\sin^2 \omega + \cos^2 \omega} = 1 \\ \forall \omega, \arg e^{j\omega} &= \text{atan} \frac{\sin \omega}{\cos \omega} = \text{atan}(\tan \omega) = \omega \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Portanto $e^{j\omega} = 1 \angle \omega$, ou seja, $e^{j\omega}$ é sempre um número complexo situado na circunferência de raio unitário do plano s e que define um raio desta que faz um ângulo ω com o semi-eixo positivo σ . Por exemplo:

$$\begin{aligned} e^{j0} &= (1, 0) \\ e^{j(\pi/2)} &= (0, 1) = j \\ e^{j\pi} &= e^{-j\pi} = (-1, 0) = j^2 \\ e^{j(3\pi/2)} &= (0, -1) = -j = j^{-1} \\ e^{j2\pi} &= (1, 0) = j^4 \end{aligned}$$

Sejam dois números complexos $e^{j\theta_1}$ e $e^{j\theta_2}$. Como a definição de Euler preserva a lei dos expoentes deve ter-se que

$$e^{j\theta_1} e^{j\theta_2} = e^{j\theta_1 + j\theta_2} = e^{j(\theta_1 + \theta_2)}. \quad (\text{A.13})$$

Ou seja o produto de dois complexos situados na circunferência de raio unitário do plano s é um complexo situado na mesma circunferência e cujo argumento é a soma dos argumentos dos factores.

De acordo com a definição de Euler tem-se em geral que para um número complexo s

$$e^s = e^{\sigma + j\omega} = e^{\sigma} e^{j\omega} = e^{\sigma} (\cos \omega + j \sin \omega). \quad (\text{A.14})$$

Deverá agora ter-se que

$$\begin{aligned} |e^{\sigma + j\omega}| &= \sqrt{(e^{\sigma})^2 \cos^2 \omega + (e^{\sigma})^2 \sin^2 \omega} = e^{\sigma} \\ \arg e^{\sigma + j\omega} &= \text{atan} \frac{e^{\sigma} \sin \omega}{e^{\sigma} \cos \omega} = \omega \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Forma exponencial de representação de números complexos

As equações (A.14) e (A.15) sugerem uma outra forma de representação dos números complexos, dita forma exponencial. Seja um número complexo s representado na forma polar por $r \angle \theta$. O módulo e o argumento do número complexo expresso por $re^{j\theta}$ são

$$\begin{aligned} |re^{j\theta}| &= r \\ \arg re^{j\theta} &= \theta \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Portanto

$$r \angle \theta = re^{j\theta}$$

A forma exponencial mostra que a multiplicação de dois complexos expressos nesta forma ou na forma polar é muito simples de calcular. Sejam os números $r_1 e^{j\theta_1}$ e $r_2 e^{j\theta_2}$:

$$r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j\theta_1} e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \quad (\text{A.17})$$

Portanto

$$r_1 \angle \theta_1 \cdot r_2 \angle \theta_2 = r_1 r_2 \angle (\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{A.18})$$

Ou seja para se multiplicar dois números complexos na forma polar, multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos.

Resumindo, neste momento dispomos de 4 formas de representação de números complexos. Se as relações em (A.9) ou em (A.10) se verificarem, então um número complexo s pode ser expresso como

$$(\sigma, \omega) = \sigma + j\omega = r \angle \theta = re^{j\theta} \quad (\text{A.19})$$

Números complexos conjugados

Se $s = \sigma + j\omega$ o *complexo conjugado* de s é o número $s^* = \sigma - j\omega$. Geometricamente s^* corresponde à reflexão de s ao longo do eixo σ . A definição implica as seguintes propriedades para os conjugados:

$$(s_1 + s_2)^* = s_1^* + s_2^* \quad (s_1 s_2)^* = s_1^* s_2^* \quad ss^* = |s|^2 \quad (\text{A.20})$$

Referências

Apostol, T. (1967). *Calculus*. vol. 1. Xerox College Publishing, Waltham, MA.

Exercícios

1. Sejam os números complexos $x = a + jb$ e $y = c + jd$. Tem-se que:

() $xy = (ac - bd) + j(ad + bc)$

() $xy = (ac + bd) + j(ad - bc)$

() $xy = (ad - bc) + j(ac + bd)$

2. Seja o número complexo $4\angle\pi/4$. É igual a:

- ☐ $4 + j\pi$
- ☐ $2e^{j\pi/4}$
- ☐ $2 + j2$
- ☐ $4e^{j\pi/4}$

3. Seja o número complexo $e^{j\omega}$. É igual a:

- ☐ $\cos \omega + j \sin \omega$
- ☐ $1\angle\omega$
- ☐ $\omega + je^{\omega}$

4. Seja a função complexa de variável real $z(t) = 5e^{j2t}$. Tem-se que:

- ☐ $\forall t, |z(t)| = 10$
- ☐ $\forall t, |z(t)| = 5$
- ☐ $\forall t, \arg z(t) = 2$
- ☐ $\forall t, \arg z(t) = 2t$

5. Seja o número complexo $x = a + jb$. Escreva a expressão deste número na forma polar (módulo e argumento) e na forma exponencial.

6. Seja o número complexo $x = r\angle\theta$. Escreva a expressão deste número na forma cartesiana e na forma exponencial.

7. Sejam os números complexos $x_1 = r_1\angle\theta_1$ e $x_2 = r_2\angle\theta_2$. Escreva as expressões de $y = x_1 \cdot x_2$, y^* , $z = \frac{1}{x_1}$, z^* .

8. Sejam os números complexos $x_1 = r_1e^{j\theta_1}$ e $x_2 = r_2e^{j\theta_2}$. Escreva as expressões de $y = x_1 \cdot x_2$, y^* , $z = \frac{1}{x_1}$, z^* .

9. Para cada uma das seguintes funções, escreva a sua assinatura. (Exemplo: a função expressa na alínea a) tem por assinatura $z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.)

- a) $z(t) = 5e^{j2t}$
- b) $z(s) = 5(s+1)^{-1}$
- c) $x(t) = \text{Re}(10e^{j2t})$
- d) $y(t) = \text{Im}(10e^{j2t})$
- e) $r(s) = |5(s+1)|$
- f) $\theta(s) = \arg(5(s+1))$

10. Determine a expressão e faça gráficos em perspectiva do módulo e argumento das seguintes funções:

$$z = j$$

$$z = s$$

$$z = s^2$$

$$z = s^3$$

$$z = \frac{1}{s}$$

$$z = \frac{1}{s + a}$$

$$z = \frac{1}{s^2}$$

$$z = \frac{1}{s^2 + \omega^2}$$

$$z = \frac{1}{(s + \sigma + j\omega)(s + \sigma - j\omega)}$$