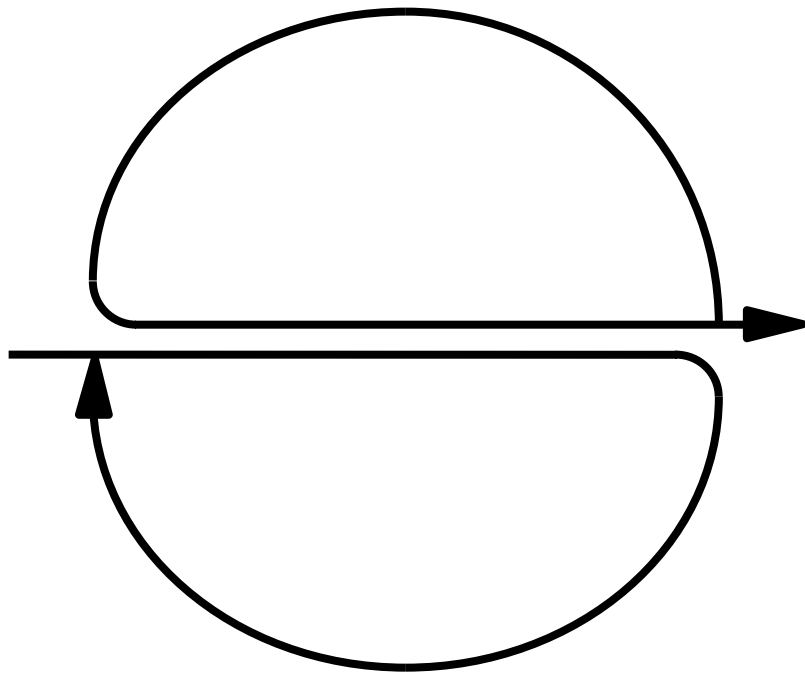


Elementos de Controlo Automático

4 – Sistemas Realimentados e de Controlo



PAULO GARRIDO

Escola de Engenharia da Universidade do Minho

Elementos de Controlo Automático / 4 Sistemas Realimentados e de Controlo

© 2005 Paulo Garrido – Universidade do Minho

Informação de direitos de autor.

Esta publicação, incluindo a faculdade de impressão, destina-se aos alunos dos cursos de engenharia da Universidade do Minho.

Pode ser utilizada por outras pessoas para fins exclusivos de aprendizagem, desde que o documento seja integralmente mantido. Qualquer outra utilização sem autorização do autor é ilícita. Este pode ser consultado em pgarrido@dei.uminho.pt

Índice

4 SISTEMAS REALIMENTADOS E DE CONTROLO	1
4.1 O problema de controlo	2
Critério de comportamento da variável a controlar	2
Variável de referência	5
Comportamento ideal e comportamento real	6
Estratégias para a solução do problema de controlo	7
4.2 Controlo por antecipação da referência	9
Limitações do controlo por antecipação de referência.....	11
4.3 Controlo por realimentação da saída.....	12
Controlo por realimentação negativa	13
Problemas de regulação e servocomando	15
Modelo estático do anel	16
Modelo dinâmico do anel.....	17
O controlo ‘On-Off’	19
O controlo proporcional	21
O controlo proporcional-integral	22
O controlo proporcional-derivativo	22
Controlo IPD	23
4.4 Exercícios.....	24

4

SISTEMAS REALIMENTADOS E DE CONTROLO

Objectivos *Sistemas realimentados. Utilização em Controlo. Problema de controlo monovariável. Expressão do comportamento desejado como um critério. Estratégias de controlo. Controlo por antecipação da referência e suas limitações. Controlo por realimentação negativa. Problemas de regulação e servocomando. Modelos estáticos e dinâmicos do anel de realimentação. Controlos do tipo 'On-Off' e PID.*

Sistemas realimentados dinâmicos (causais) são aqueles em que o valor de uma variável num instante t depende da evolução dessa variável no passado. Suponhamos um sistema que admite como modelo o integrador realimentado:

$$\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u \quad (4.1)$$

Satisfaz a definição de sistema realimentado visto que:

$$y(t) = \int_0^t b_0 u(\tau) - a_0 y(\tau) d\tau + y(0) \quad (4.2)$$

O valor $y(t)$ da variável y depende da evolução dela mesma no intervalo $]0, t[$ e do valor de $y(0)$ como uma constante aditiva.

O fenómeno da realimentação aparece portanto naturalmente. Por exemplo, em qualquer sistema modelizável por (4.1). Este exemplo é um de uma infinidade possível.

Este capítulo tem por objectivo apresentar modelos lineares de sistemas realimentados, os quais são deliberadamente projectados e construídos para resolver problemas de controlo. Isto significa que, no projecto e construção destes sistemas, se criam estruturas de realimentação de variáveis com a finalidade de controlar o comportamento das variáveis do sistema, ou como também se diz, de uma forma mais grosseira, com o objectivo de controlar o sistema.

4.1 O problema de controlo

Neste capítulo aborda-se o controlo de 1 só variável de um sistema. Quando assim é, o controlo é dito escalar ou monovariável. O controlo de 2 ou mais variáveis é dito vectorial ou multivariável.

No controlo monovariável, o problema de controlo é formulado como requerendo que o comportamento de *uma* certa variável y – a *variável a controlar do sistema a controlar* – satisfaça um certo *critério*. O critério especifica, ou diz-nos, como deve ser o comportamento da variável.

Critério de comportamento da variável a controlar

Os critérios possíveis para o comportamento de uma variável podem ser muito diversos e expressos de formas também muito diversas. Uma forma usual de declarar um critério é admitir que existe uma função do tempo $y_r(t)$, que traduz de forma ideal esse comportamento e requerer que a variável y apresente esse comportamento.

Sendo assim, o critério escreve-se como:

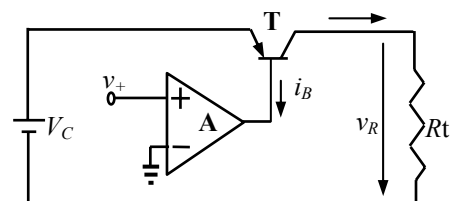
$$y(t) = y_r(t) \quad (4.3)$$

Muitas vezes pretende-se que o valor de $y(t)$ se mantenha igual a um certo valor constante ao longo do tempo. Isto pode traduzir-se por

$$y(t) = y_r(t) = y_{r0} . \quad (4.4)$$

Exemplo 4-1: alimentação de uma carga ómica a tensão constante.

Figura 4-1 O amplificador **A** é diferencial e de transcondutância. Isto quer dizer que a corrente na saída é proporcional à tensão diferencial na entrada: $i_B = K_A v_+$. O valor de R é restrito a manter o transistor **T** na zona activa, em que $i = K_T i_B$, K_T constante .



O sistema eléctrico representado na Fig.4-1 permite alimentar a carga de valor ómico R variante no tempo, $R = R(t)$ a uma tensão v_R , diferente e menor do que V_C , que se supõe poder variar mas cujo módulo é sempre maior que v_R . O valor de v_R depende do valor de v_+ e de R . Pretende-se que a queda de tensão v_R seja constante e igual a 5 V dentro do domínio admissível de valores de R . Isto pode traduzir-se pela seguinte critério:

$$v_R(t) = v_r(t) = 5$$

Note-se que $v_R(t)$ significa o valor da tensão na carga ómica e $v_r(t)$ o comportamento ideal da mesma.

Exemplo 4-2: alimentação de água a pressão constante.

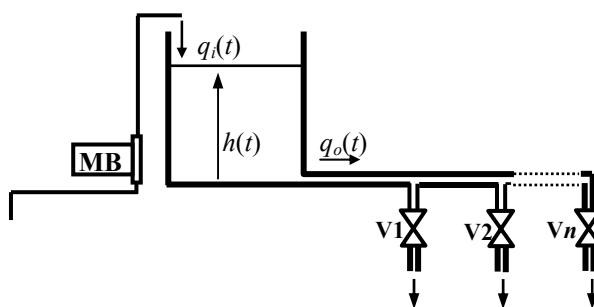


Figura 4-2 A motobomba MB permite lançar no tanque o fluxo de água $q_i(t)$. O fluxo de saída de água $q_o(t)$ depende da altura do nível de água $h(t)$ e do estado de abertura das válvulas V1 a Vn.

O sistema hidráulico representado na Fig. 4-2, permite alimentar pontos de consumo de água através das válvulas V1 a Vn. Pretende-se que a pressão da água à saída do tanque seja constante, independentemente do estado de abertura das válvulas. Para tal, a altura de água no tanque deve ser constante e igual a 2 m. Então o critério é:

$$h(t) = h_r(t) = 2 \quad (4.5)$$

Outras vezes pretender-se-á que a variável a controlar tome valores diferentes ao longo do tempo de um certa forma. A expressão do critério tornar-se-á um pouco mais complicada, mas será sempre possível obtê-la.

Exemplo 4.3: movimentação de um elevador.

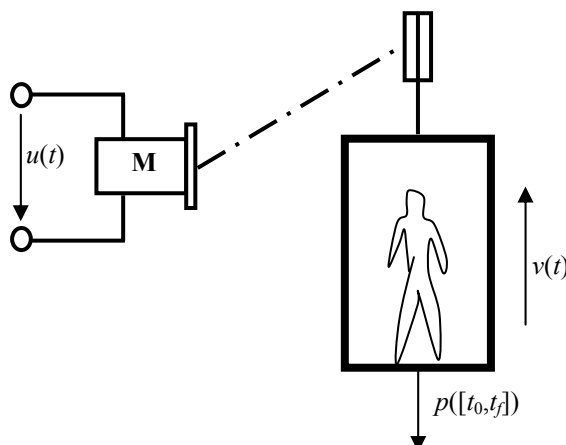


Figura 4-3 O motor de corrente contínua **M** acciona o elevador (através de um sistema mecânico apenas esquematicamente indicado na figura). O peso da cabina supõe-se perfeitamente equilibrado por um contrapeso (não representado na figura). O peso da carga do elevador em cada viagem com início em t_0 e fim em t_f representa-se por $p([t_0, t_f])$. Este peso será em princípio diferente de viagem para viagem.

Pretende-se que a velocidade do elevador siga sempre o mesmo perfil em diferentes viagens, independentemente do valor de $p([t_0, t_f])$. Este perfil é constituído por 3 secções:

- uma secção inicial de aceleração sem descontinuidades no valor da mesma (de forma a maximizar o conforto dos passageiros)
- uma secção de velocidade constante e igual a 2 m/s;
- uma secção final de desaceleração sem descontinuidades no valor da mesma (de forma a maximizar o conforto dos passageiros).

Exemplo 4-4: traçador de gráficos.

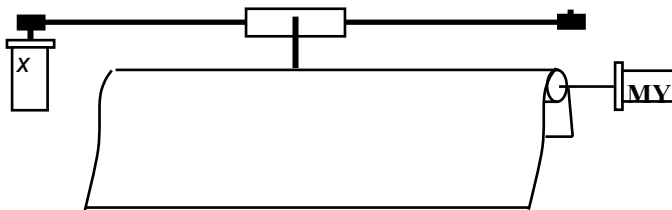


Figura4-4 Princípio de funcionamento de um ‘plotter’ de tambor.

Um traçador de gráficos é composto por um tambor que, em conjunto com outros mecanismos não representados, faz avançar o papel na direcção y . O tambor é accionado pelo motor de corrente contínua **MY**. O motor **MX**, acciona através de carretos e uma correia o suporte **S** provocando o deslocamento da caneta na direcção x .

Pretende-se um movimento coordenado dos motores, tal que uma circunferência de 10 cm de diâmetro seja traçada a uma velocidade tangencial de 3,14 cm/s.

Pode verificar-se que as evoluções pretendidas para x e y podem ser:

$$\begin{cases} x(t) = x_r(t) = 0.1 \cos(0.314t) \\ y(t) = y_r(t) = 0.1 \sin(0.314t) \end{cases} \quad (4.6)$$

A movimentação coordenada dos dois eixos de acordo com (4.6) traçará a circunferência pretendida à velocidade especificada. Neste caso, o problema de controlo é multivariável, mas cada eixo pode ser tratado

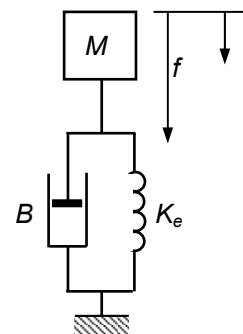
independentemente desde que os movimentos sejam coordenados.

Nos casos anteriores, o critério, de facto, diz respeito à resposta forçada das variáveis. Nada impede que um critério diga respeito à resposta livre.

Exemplo 4-5: critério de comportamento para a resposta livre de um sistema mecânico.

Imagine-se que o sistema a controlar é semelhante ao apresentado no Capítulo 2, repetindo-se o seu diagrama na figura ao lado. O deslocamento x tanto pode acontecer em regime livre (nenhuma força exterior aplicada) como em regime forçado (força exterior aplicada). Pretende-se que a resposta livre $x_L(t)$ seja a de um oscilador com $\zeta = 0.7$ e $\omega_n = 1$. Se assim acontecer, ela deve satisfazer a equação

$$x'' + 1.4x' + x = 0. \quad (4.7)$$



Portanto, a função do tempo que traduz neste caso o comportamento ideal da resposta livre é

$$x_L(t) = x_r(t) = x(0) 1.4 e^{-0.7t} \sin(0.7t + \pi/4) \quad (4.8)$$

Na Figura 4-5 apresenta-se esta função.

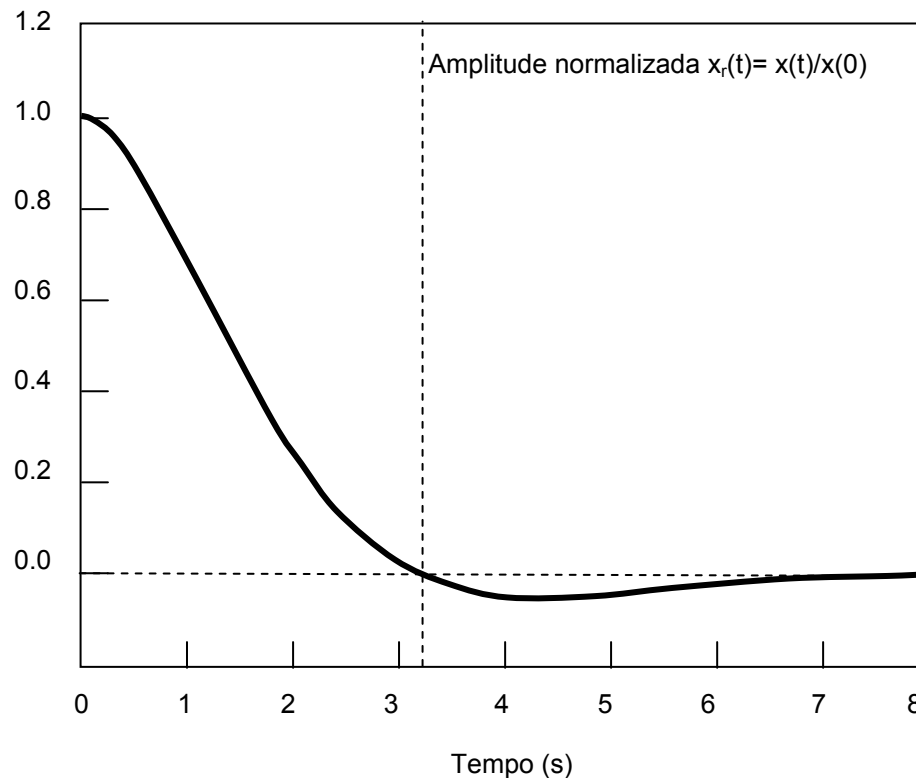


Figura 4-5 Resposta livre $x_r(t)$ pretendida para o deslocamento do sistema mecânico do Exemplo 4-5.

Variável de referência

Em todos os exemplos anteriores o critério pelo qual definimos o comportamento pretendido é $y(t) = y_r(t)$. Vimos que $y_r(t)$ pode ter formas diversas, mas em todos os exemplos, a sua forma específica é razoavelmente previsível de antemão. Há, no entanto, muitos casos em que esta capacidade de prever $y_r(t)$ é muito baixa, ou praticamente nula. Por exemplo, um sistema de direcção assistida de um automóvel tem que manter o ângulo entre as rodas directrizes e o eixo do veículo proporcional à rotação do volante imposta pelo condutor. Esta rotação é imprevisível – a menos de, eventualmente, certos parâmetros probabilísticos. Como é que, então, se define o comportamento pretendido $y_r(t)$? A resposta é simples (embora possa exigir alguma reflexão): consideramos y_r como uma variável por direito próprio e chamamos-lhe *variável de referência*. Não pressupomos *nada* acerca do que pode ser a sua evolução no tempo. E, claro, ao formular o problema de controlo, declaramos que a *variável controlada* $y(t)$ deve ser igual à *variável de referência*, ou seja, mais uma vez

requeremos $y(t) = y_r(t)$. Note-se, no entanto, que, a partir de agora, a igualdade anterior significa igualdade de valores entre 2 variáveis – não apenas que a variável y deve seguir uma certa evolução $y_r(t)$.

Comportamento ideal e comportamento real

A introdução do conceito de variável de referência, permite-nos responder a uma questão, que talvez já esteja a inquietar o leitor. O critério que supusemos acima, $y(t) = y_r(t)$, diz-nos que a variável controlada $y(t)$ deve ser exactamente igual à variável $y_r(t)$, para todo o t . Isto é que $\forall t, y_r(t) - y(t) = 0$. Isto é razoável? A resposta é não por 2 razões:

- Porque, em geral, é impossível;
- Porque, em geral, é desnecessário.

O que normalmente se exige no controlo de uma variável é que ela *siga* a variável de referência de uma forma “bem comportada”, isto é, não ultrapassando um erro máximo, ou mantendo-se numa vizinhança especificada de $y_r(t)$.

Definamos a *variável de erro* por $e(t) = y_r(t) - y(t)$. Então, uma segunda forma de definirmos o *critério* que define o comportamento desejado seria escrever:

$$\forall t, |e(t)| \leq \varepsilon \quad (4.9)$$

Em (4.9) ε significa o módulo do erro máximo aceitável no comportamento de $y(t)$. A Figura 4-6 mostra uma evolução de $y(t)$ admissível, visto que o módulo do erro máximo nunca é ultrapassado.

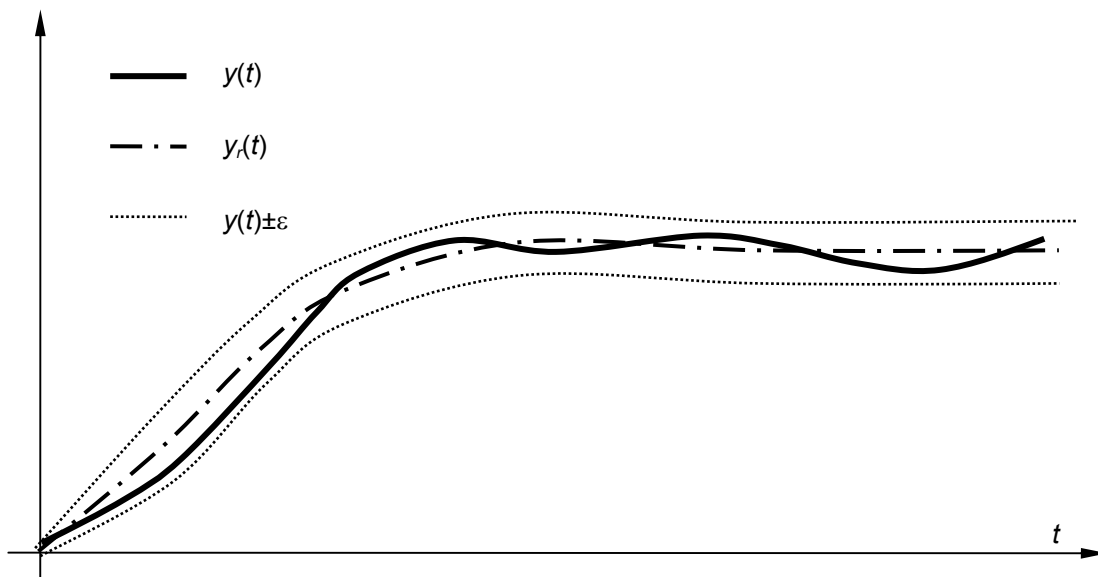


Figura 4-6 O comportamento de uma variável controlada é admissível – ou está controlado – se o seu erro ou afastamento em relação à variável de referência não excede a tolerância admissível ε .

A aplicação do critério (4.9) usará de alguma flexibilidade – poderão existir situações pontuais em que o critério possa não ser satisfeito, sem que o sistema de controlo se torne inútil.

O critério (4.9) não é o único possível para lidar com o facto de que o comportamento real não é o ideal. O chamado *controlo óptimo* considera um critério J da forma:

$$J = \min \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (4.10)$$

Ou seja, em vez de se impor um “hard limit”, o problema de controlo é formulado como conseguir minimizar o integral (somatório) do quadrado dos erros ao longo do tempo.

Estratégias para a solução do problema de controlo

Um problema de controlo existe se o comportamento da variável y *não* satisfaz naturalmente o critério. Dependendo do problema de controlo em causa, é condição necessária, embora talvez não suficiente, para o problema ser solúvel, que aconteça um de duas coisas (ou ambas):

- a) Que seja possível alterar os parâmetros do sistema.
- b) Que no sistema exista uma *variável de actuação* u que influencia o comportamento $y(t)$ e cuja evolução ao longo do tempo $u(t)$ nós podemos estabelecer. Se tal acontece, dizemos que y é *controlável*¹ a partir de u .

No primeiro caso, (veja-se o Exemplo 4-5) o problema será resolvido se uma alteração que possamos fazer no valor dos parâmetros fizer com que o critério seja satisfeito. Usualmente, a possibilidade de alterar os parâmetros de um sistema a controlar é reduzida, mas esta situação tenderá a mudar com o avanço tecnológico.

A segunda alternativa é de longe a mais comunmente usada. A estratégia é utilizar a capacidade que temos de estabelecer a evolução de $u(t)$, para levar $y(t)$ a seguir $y_r(t)$ de acordo com o critério.

Isto pode ser feito por seres humanos ou pode ser feito por dispositivos automáticos. Quando tal é feito por um dispositivo automático, isto é, um dispositivo que dispensa a intervenção humana, falamos em *controlo automático*.

¹ Esta é uma noção de controlabilidade muito vaga. Não pode ser objectivo deste capítulo discutir em pormenor a controlabilidade de uma variável ou sistema.

O *agente* – ser humano ou dispositivo automático que realiza o controlo – é dito o *controlador*. A relação entre variável de referência, controlador, variável de actuação, sistema a controlar e variável a controlar, pode ser representada como na Figura 4-7.

Quando a forma de realizar o controlo pode ser globalmente representada pela Figura 4-7, dizemos que se está a utilizar uma estratégia de *antecipação de referência*.

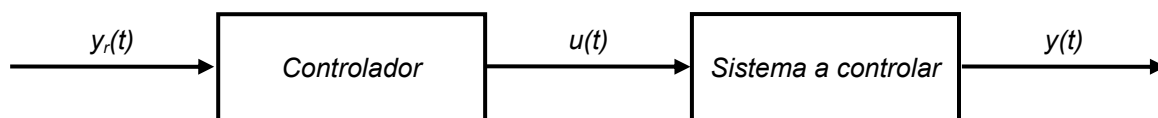


Figura 4-7 Diagrama conceptual para o controlo de uma variável de um sistema usando apenas *antecipação da referência*.

Antes de examinarmos as possibilidades e limitações desta estratégia, vamos fazer notar o seguinte. Normalmente um controlador não tem potência nem configuração física para estabelecer o valor da variável que no sistema irá influenciar a variável y . Então é preciso usar um *actuador* ou uma *interface de actuação* entre o controlador e o sistema a controlar. Veja-se a Figura 4-8.

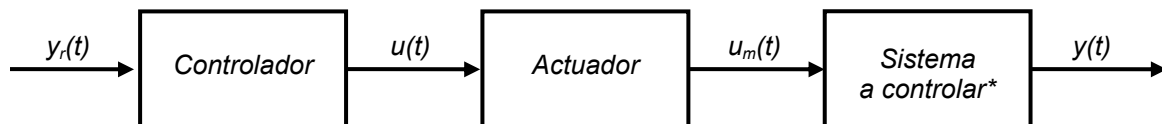


Figura 4-8 O actuador ou interface de actuação permite transformar a variável de comando $u(t)$ na variável de manipulação $u_m(t)$ do sistema a controlar.

À variável $u(t)$ que é saída do controlador e entrada do actuador, chamamos *variável de comando*. À variável $u_m(t)$ que é saída do actuador e a variável do sistema que influencia $y(t)$, chamamos *variável de manipulação*.

A distinção entre variável de comando e variável de manipulação está longe de ser clara em todos os sistemas de controlo e sofre sempre de alguma subjectividade de apreciação. Na Tabela 4-1 exemplificam-se possíveis distinções entre variáveis de comando e de manipulação para exemplos do Capítulo 2.

Tabela 4-1 Exemplos de distinções entre variáveis de comando e variáveis de manipulação

Sistema a controlar	Variável de comando	Variável de manipulação
Hidráulico (Exemplo 2-8)	Tensão de comando da motobomba.	Fluxo de água que entra no tanque.
Térmico (Exemplo 2-10)	Tensão eléctrica de comando do relé que liga ou desliga a resistência de aquecimento.	Potência calorífica.
Mecânico de rotação (Exemplo 2-12)	Tensão de entrada do amplificador.	Binário produzido pelo motor.

É natural considerar o controlador e o actuador como o *sistema de controlo* que se aplica ao sistema a controlar. Entretanto, a tendência do desenvolvimento tecnológico faz com que muitos sistemas sejam construídos incorporando um actuador (ou mais). Do ponto de vista da análise do sistema total, passa-se também o seguinte: é mais simples e mais fácil considerar que o *actuador faz parte* do sistema a controlar². Por esta razão, basear-se-á o desenvolvimento seguinte no diagrama da Figura 4-7. Sabendo nós, claro, que muitas vezes, o sistema a controlar aí considerado inclui um actuador como mostra o diagrama da figura 4-8.

4.2 Controlo por antecipação da referência

Dentro das suas limitações, que examinaremos a seguir, o controlo por antecipação da referência tem grande importância prática e teórica. Examinamos 3 situações.

Suponhamos que o sistema a controlar aceita um modelo linear para relacionar $u(t)$ e $y(t)$, e que este modelo é estritamente estável:

$$\begin{aligned} Y(s) &= H(s)U(s) \\ |H(s_i)| = \infty &\rightarrow \operatorname{Re}(s_i) < 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Suponhamos também o controlador é linear com função de transferência $C(s)$. Nesta situação muito comum, é fácil resolver o problema de controlo se o critério impuser que o valor de y em regime permanente deve ser igual a um valor de referência constante, y_{r0} :

$$y_{rp} = y_{r0} \quad (4.12)$$

O diagrama da Figura 4-7 torna-se no da Figura 4-9.

² Mesmo quando o actuador não está incorporado no sistema a controlar e deve ser ligado a este.



Figura 4-9 Diagrama conceptual para o controlo de uma variável de um sistema usando modelos lineares para o sistema a controlar e o controlador, a variável de referência sendo constante (em degrau).

Pomos $C(s) = K_c$. Então:

$$Y(s) = K_c H(s) \frac{y_{r0}}{s}. \quad (4.13)$$

Aplicando os resultados de (3.131), ou aplicando o teorema do limite final das transformadas de Laplace, obtemos:

$$y_{rp} = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = K_c |H(0)| y_{r0} = K_c K_{rp} y_{r0}. \quad (4.14)$$

Sendo $K_{rp} = |H(0)|$, o ganho em regime permanente de $H(s)$. Então:

$$y_{rp} = y_{r0} \leftrightarrow K_c = (K_{rp})^{-1}. \quad (4.15)$$

Num segunda situação, suponhamos agora que pretendemos que $y(t)$ responda à variável de referência $y_r(t)$ de uma certa forma. Esta forma é especificada por um modelo de referência $H_{ref}(s)$. Isto é, pretendemos que:

$$Y(s) = H_{ref}(s) Y_r(s). \quad (4.16)$$

Então:

$$H_{ref}(s) = C(s) H(s) \leftrightarrow C(s) = H_{ref}(s) (H(s))^{-1} \quad (4.17)$$

O problema é então solúvel se $H_{ref}(s) (H(s))^{-1}$ for uma função de transferência causal.

Exemplo 4-6: modelo de referência de segunda ordem.

Suponha-se que o sistema a controlar aceita o seguinte modelo de primeira ordem:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{2s+1} \quad (4.18)$$

Pretende-se que a resposta $y(t)$ à referência $y_r(t)$ seja a do seguinte modelo de segunda ordem criticamente amortecido, com ganho em regime permanente unitário, isto é:

$$H_{ref}(s) = \frac{0.25}{s^2 + s + 0.25}. \quad (4.19)$$

Então:

$$C(s) = H_{ref}(s)(H(s))^{-1} = \frac{0.25}{(s+0.5)(s+0.5)} \frac{s+0.5}{5} = \frac{0.05}{s+0.5} = \frac{0.1}{2s+1}. \quad (4.20)$$

Podemos considerar agora a situação de a variável de referência y_r ter uma evolução arbitrária $y_r(t)$ e pretendemos $y(t) = y_r(t)$. Então:

$$\begin{aligned} Y(s) &= C(s)H(s)Y_r(s) \\ Y(s) &= Y_r(s) \leftrightarrow C(s)H(s) = 1 \leftrightarrow C(s) = (H(s))^{-1} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Em geral, o problema de controlo é insolúvel colocado nesta forma ideal, porque $H(s)$ terá mais pólos do que zeros, logo a sua inversa $(H(s))^{-1}$ terá mais zeros do que pólos e, por consequência, a função de transferência $C(s)$ será não-causal, e, logo, o controlador será fisicamente irrealizável.

Limitações do controlo por antecipação de referência

O controlo por antecipação da referência pressupõe o conhecimento prévio e exacto dos parâmetros da função de transferência $H(s)$ do sistema a controlar e na hipótese de a variável $u(t)$ ser a única a influenciar a variável $y(t)$. Como as condições reais de operação dos sistemas invalidam usualmente estes pressupostos, uma estratégia de controlo por antecipação da referência ou terá de ser abandonada ou terá de ser associada a uma estratégia de controlo por realimentação.

Vejamos então as limitações do controlo por antecipação da referência.

- i) Exige que se conheçam com grande precisão os valores dos parâmetros do sistema. Se tal não for o caso, as duas primeiras situações consideradas poderão apresentar erros inaceitáveis.
- ii) Para além de exigir que se conheçam com grande precisão os valores dos parâmetros do sistema, exige também que eles sejam rigorosamente invariantes no tempo. Qualquer mudança ou perturbação no valor de um parâmetro do sistema a considerar leva-nos à situação anterior.
- iii) Devido a i) e ii), não é possível controlar sistemas instáveis ou marginalmente estáveis com antecipação da referência. Embora tal seja possível do ponto de vista matemático (usando um modelo de referência), a mínima diferença entre os valores reais dos parâmetros e os valores supostos para o projecto do controlador tornaria o sistema global actualmente instável.
- iv) Se a variável y for influenciada de forma significativa por uma outra variável, digamos p , de perturbação, o controlo por antecipação da referência torna-se praticamente inútil.

Chamamos *variável de perturbação* (e notamo-la usualmente por $p(t)$) a qualquer variável do sistema que influencia o comportamento de $y(t)$ de uma forma adversa aos nossos objectivos expressos pelo critério. A Figura 4-10 representa graficamente a situação no domínio de Laplace.

Torna-se claro que, enquanto na suposição anterior se tinha que $Y(s) = H(s)U(s)$, agora se tem

$$Y(s) = H(s)U(s) + P(s). \quad (4.22)$$

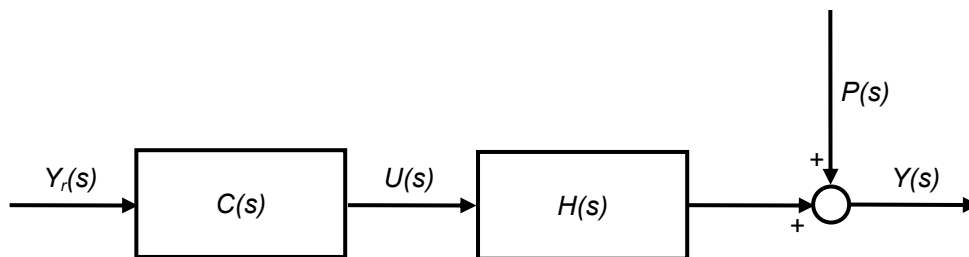


Figura 4-10 Diagrama mostrando uma variável de perturbação $P(s)$ que se soma à influência de $U(s)$ em $Y(s)$.

Note-se que a variável de perturbação $p(t)$ é *incontrolável*. Se assim, não fosse, não haveria razão para lhe chamarmos variável de perturbação, pois poderíamos encontrar algum meio de a controlar. Dado isto, o que nós podemos fazer é usar a variável u para *compensar* os efeitos adversos de p em y . Mas para tal, é necessário medir os valores de $y(t)$ em linha e actuar com base no desvio entre esses valores e os valores de $y_r(t)$, ou seja, actuar com base na variável de *erro* $e(t) = y_r(t) - y(t)$. É aqui que entra em jogo a estratégia de controlo por realimentação negativa que estudaremos a seguir.

4.3 Controlo por realimentação da saída

O que está *errado*, no diagrama da Figura 4-10 é o controlador não poder *saber* o que se passa com a variável controlada $y(t)$ ou $Y(s)$. Se, ao contrário, o controlador conhecer o valor $y(t)$, pode realizar a operação:

$$u_g(t) = y_r(t) + ky(t) \quad (4.23)$$

Em que u_g é chamado o *comando primário* e k é uma constante. A acção de comando $u(t)$ é assim influenciada pelo valor conhecido da variável de saída y , $y(t)$. E porque a acção de comando vai influenciar a saída, é criado um *anel de realimentação*.

Se fizermos k igual a -1 formando o erro $e(t) = y_r(t) - y(t)$, a realimentação será considerada *negativa no controlador*. Se fizermos k igual a $+1$ formando o acumulado $a(t) = y_r(t) + y(t)$, a realimentação será considerada *positiva no controlador*.

O *sinal da realimentação no anel* é função do número dos ganhos de valor negativo que aparecem nas funções de transferência dos elementos que compõem o anel. Será negativo se este número for ímpar. Será positivo se for 0 ou par.

A realimentação negativa e a realimentação positiva têm diferentes propriedades e logo diferentes usos em Controlo. A utilização da realimentação que se pretende é indicada pelo *sinal nominal da realimentação no controlador* definido em (4.23) e corresponde ao sinal da realimentação no anel se o número de ganhos negativos nas restantes funções de transferência for 0 ou par.

No seguimento iremos tratar do controlo por realimentação negativa. Note-se que um controlador que possa realizar a operação (4.23) com valores positivos e negativos de k , tanto pode criar realimentação negativa como positiva.

Controlo por realimentação negativa

Na realimentação negativa *no erro*, o comando primário é o erro $e(t) = y_r(t) - y(t)$, com transformada de Laplace $E(s)$. O controlador gerará $u(t)$ pela convolução representada em Laplace por:

$$U(s) = C(s)E(s) \quad (4.24)$$

E o objectivo do controlo poderá ser indicado como o valor de y , quando perturbado, convergir para o intervalo $y_r(t) \pm \varepsilon$ num certo tempo máximo τ :

$$y(t + \tau) \in y_r(t) \pm \varepsilon \quad (4.25)$$

Para realizar um esquema de realimentação (negativa) mais generalizado, consideramos a adição feita no diagrama da Figura 4-11 de um sensor com função de transferência $M(s)$ que mede o valor de $y(t)$ no sistema a controlar e o comunica ao controlador na variável $y_m(t)$. O conjunto do sistema a controlar e do sensor forma o processo a controlar ou simplesmente *processo*, com entradas u e p e saídas y e y_m . O modelo do processo é MIMO definido pelas equações no domínio s :

$$\begin{aligned} Y(s) &= H(s)U(s) + P(s) \\ Y_m(s) &= M(s)Y(s) \end{aligned} \quad (4.26)$$

O controlador tem por entradas y_r e y_m e forma a variável de comando $u(t)$ ou $U(s)$ ³ através de um *algoritmo ou lei de controlo*. No domínio de Laplace, um modelo geral linear para o controlador considerado é:

$$U(s) = C(s)[Y_r(s)F(s) - K(s)Y_m(s)] \quad (4.27)$$

Veja-se o diagrama da Figura 4-11.

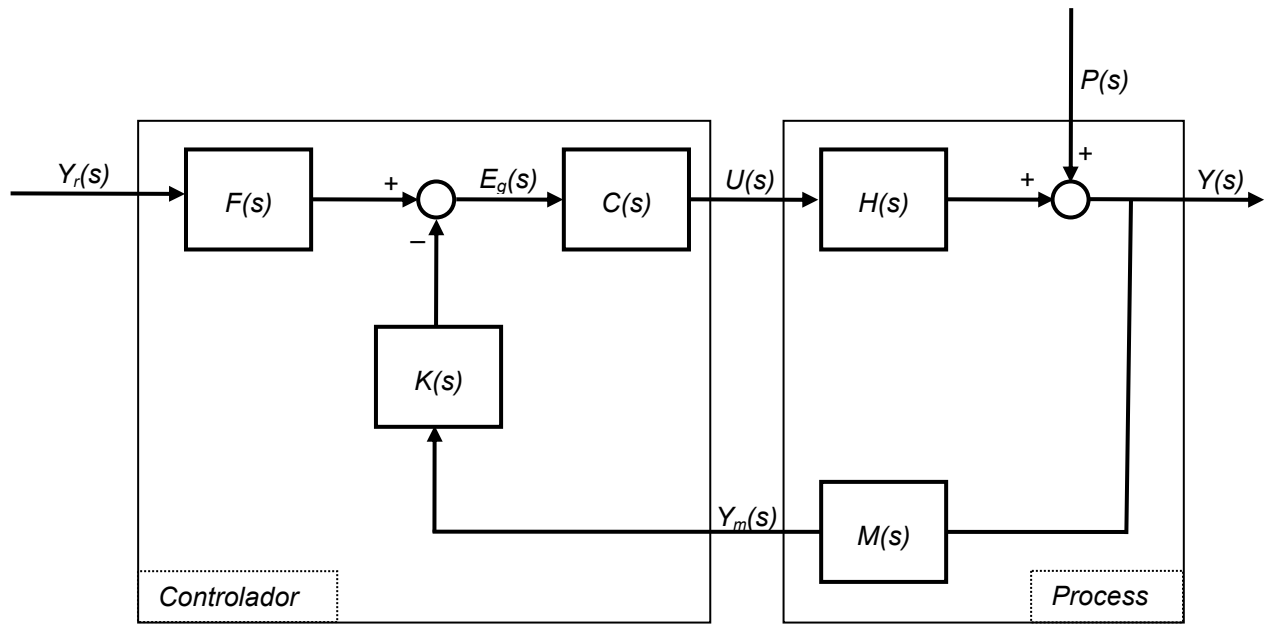


Figura 4-11 Diagrama para o controlo escalar com 1 perturbação $P(s)$. O sensor é representado com função de transferência $M(s)$.

Sem perda de generalidade podemos supor $M(s) = K_s$, ou seja que o sensor é adequadamente modelizado pelo ganho estático K_s . Fazendo $K(s) = 1/K_s$, podemos supor que o processo só tem 1 saída y que é a correspondente entrada do controlador. Fazendo $F(s) = 1$, obtém-se o esquema de controlo baseado no erro representado na Figura 4-12. As equações de processo e controlador são

$$\begin{aligned} Y(s) &= H(s)U(s) + P(s) \\ U(s) &= C(s)E(s) = C(s)[Y_r(s) - Y(s)] \end{aligned} \quad (4.28)$$

O esquema diz-se baseado no erro porque a entrada para a função de transferência, ou lei de controlo $C(s)$, que define o comando $U(s)$ é o erro $E(s)$.

³ Daqui em diante deixaremos de distinguir explicitamente as representações de uma variável no tempo ou em Laplace.

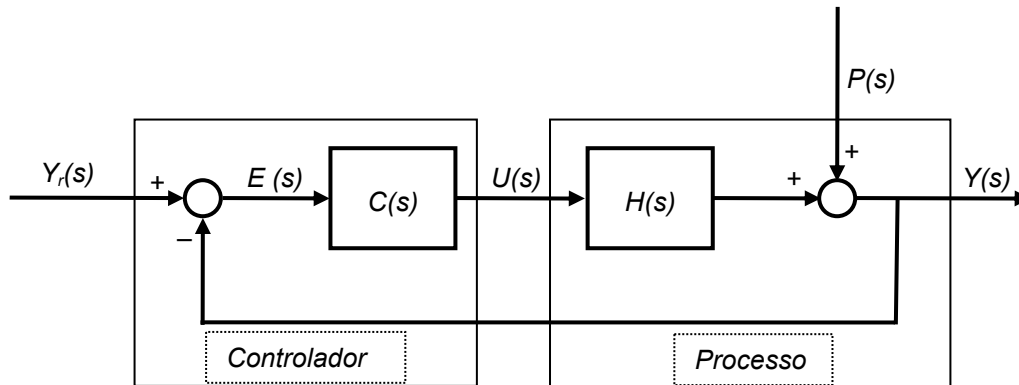


Figura 4-12 Diagrama para o controlo escalar no erro com 1 perturbação $P(s)$. O projectista deve estabelecer a função de transferência $C(s)$.

A realimentação deste modelo diz-se *unitária*, porque

$$E(s) = Y_r(s) - Y(s) = Y_r(s) - 1 \cdot Y(s). \quad (4.29)$$

Ou seja, o ganho da variável de saída para o ponto de realimentação é 1. Este tipo de controlador fica especificado pela função de transferência $C(s)$. O que se pode pretender atingir, por exemplo, para o critério (4.25)? O que determina o comportamento de $y(t)$?

Das equações (4.28), deduz-se que

$$\begin{aligned} Y(s) &= H(s)U(s) + P(s) = C(s)H(s)E(s) + P(s) \\ &= C(s)H(s)[Y_r(s) - Y(s)] + P(s) \\ &\Leftrightarrow \\ Y(s)(1 + C(s)H(s)) &= C(s)H(s)Y_r(s) + P(s) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Logo

$$Y(s) = \frac{C(s)H(s)}{1 + C(s)H(s)} Y_r(s) + \frac{1}{1 + C(s)H(s)} P(s). \quad (4.31)$$

A equação (4.31) descreve o comportamento variável controlada Y como resultado da soma de duas parcelas: uma devida à entrada de referência, a outra devida à perturbação. A questão é: como projectar $C(s)$ de forma que a primeira seja maximizada e a segunda minimizada no valor de $y(t)$?

Problemas de regulação e servocomando

A linearidade do modelo permite-nos separar a solução do problema de controlo em 2 problemas. O *problema de regulação* é definido por $Y_r(s) = 0$:

$$Y(s) = \frac{1}{1 + C(s)H(s)} P(s) \quad (4.32)$$

O *problema de servocomando*, é definido por $P(s) = 0$.

$$Y(s) = \frac{C(s)H(s)}{1 + C(s)H(s)} Y_r(s) \quad (4.33)$$

Consideremos critérios ideais de regulação e servocomando. São definidos por pormos $\tau = 0$; $\varepsilon = 0$ em (4.25). Então a solução do problema ideal de regulação seria ter

$$\frac{1}{1 + C(s)H(s)} = 0 \quad (4.34)$$

E a solução do problema ideal de servocomando seria ter

$$\frac{C(s)H(s)}{1 + C(s)H(s)} = 1. \quad (4.35)$$

Modelo estático do anel

Se o modelo $H(s)$ for estático, $H(s) = K_h$, então $C(s) = K_p$ permitirá aproximar a solução ideal na medida em que for possível subir K_p :

$$Y(s) = \frac{K_p K_h}{1 + K_p K_h} Y_r(s) + \frac{1}{1 + K_p K_h} P(s). \quad (4.36)$$

Ambas as condições são muito bem aproximadas se $K_p K_h \gg 1$. Mas devemos lembrar-nos que

$$u(t) = K_p e(t). \quad (4.37)$$

O actuador deve ser capaz de variar continuamente o valor de $u(t)$ num intervalo de valores efectivos de comando $U_e = [u^-, u^+]$. Dividindo por K_p obtemos o intervalo de valores do erro em que o sistema opera em modo linear $E_l = [e^-, e^+] = \left[\frac{u^-}{K_p}, \frac{u^+}{K_p} \right]$. Fora deste intervalo, o actuador satura e introduz um comportamento não-linear no anel. O modelo linear estático (4.36) que descreve o anel de realimentação deixa de ser válido e pode afastar-se muito da realidade.

Este intervalo é tanto mais pequeno quanto mais elevado for K_p . O valor de K_p resultará então de um compromisso entre precisão e funcionamento linear. Uma forma usual de raciocinar é começar por considerar o problema de regulação.

Define-se K_p pela fracção de aceitação da perturbação k_{ap} que ela provoca:

$$k_{ap} = \frac{1}{1 + K_p K_h} \quad (4.38)$$

Então

$$K_p = \frac{1}{K_h} \frac{1 - k_{ap}}{k_{ap}} \quad (4.39)$$

Suponha-se que o valor máximo esperado do módulo da perturbação é p^+ e o módulo do desvio aceitável é ε . Então obtemos o valor de k_{ap} necessário:

$$y(t) \in [-\varepsilon, +\varepsilon] \rightarrow p^+ k_{ap} = \varepsilon \rightarrow k_{ap} = \frac{\varepsilon}{p^+} \quad (4.40)$$

Determinado o valor de K_p , verifica-se se ele é compatível com o funcionamento linear do sistema. A seguir considera-se o problema de servocomando. A fracção de aceitação da referência é

$$k_{ar} = \frac{K_p K_h}{1 + K_p K_h} \quad (4.41)$$

Se for necessário fazer exactamente igual a 1 o ganho, usa-se:

$$F(s) = \frac{1}{k_{ar}} \quad (4.42)$$

Então:

$$\begin{aligned} Y(s) &= k_{ar} \frac{1}{k_{ar}} Y_r(s) \\ Y(s) &= Y_r(s) + k_{ap} P(s) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Modelo dinâmico do anel

Considere-se o modelo linear (4.31) em que $H(s)$ é um modelo dinâmico:

$$Y(s) = \frac{C(s)H(s)}{1 + C(s)H(s)} Y_r(s) + \frac{1}{1 + C(s)H(s)} P(s) \quad (4.44)$$

Não é válida a hipótese de as relações entre referência e saída, por um lado, e entre perturbação e saída, por outro, serem estáticas. O anel de realimentação tem um modelo dinâmico. Podemos, no entanto, perguntar: quais as características dos modelos dinâmicos realizáveis através de $C(s)$ que melhor aproximam um modelo estático e melhor servem a solução do problema de controlo?

A primeira característica que requereremos é que o anel de realimentação seja *estritamente estável*. Como ambas as funções de transferência têm o mesmo denominador, isto implica que os seus pólos ou os zeros da *equação característica do anel*:

$$1 + C(s)H(s) \quad (4.45)$$

estejam no semiplano esquerdo do plano s .

Se o anel de realimentação for estritamente estável, então quaisquer respostas de $Y(s)$ a entradas $Y_r(s)$ ou $P(s)$ têm um regime permanente e um regime transitório. Os objectivos no projecto de $C(s)$ são obter:

- i) No regime permanente, um bom seguimento ou aceitação da referência e uma boa rejeição da perturbação;
- ii) Um regime transitório “bem comportado”, isto é, estritamente estável, tão curto e tão livre de oscilações próprias quanto possível.

Um bom seguimento ou aceitação da referência e uma boa rejeição da perturbação no regime permanente, dependem da evolução destas variáveis no mesmo regime. Se a evolução das variáveis de referência e de perturbação no regime permanente for bem representada por degraus de amplitude y_{r0} e p_0 , respectivamente, tem-se que

$$y_{rp} = K_{rpr} y_{r0} + K_{rpp} p_0 \quad (4.46)$$

Em que os ganhos em regime permanente K_{rpr} e K_{rpp} são definidos, presumindo-se que o anel $(1 + C(s)H(s))^{-1}$ é estritamente estável, por:

$$K_{rpr} = \left| \frac{C(0)H(0)}{1 + C(0)H(0)} \right| \quad K_{rpp} = \left| \frac{1}{1 + C(0)H(0)} \right| \quad (4.47)$$

Estes ganhos identificam-se com as taxas de aceitação e rejeição definidos anteriormente:

$$K_{rpr} = k_{ar} \quad K_{rpp} = k_{ap} \quad (4.48)$$

Observemos o seguinte:

$$\begin{aligned} k_{ar} &= |C(0)H(0)| k_{ap} \wedge k_{ap} = \frac{1}{1 + |C(0)H(0)|} \rightarrow \\ 0 \leq |C(0)H(0)| \leq \infty &\rightarrow k_{ar} \in [0, 1] \wedge k_{ap} \in [1, 0] \\ |C(0)H(0)| = 0 &\rightarrow k_{ar} = 0 \wedge k_{ap} = 1 \\ |C(0)H(0)| = 1 &\rightarrow k_{ar} = \frac{1}{2} \wedge k_{ap} = \frac{1}{2} \\ |C(0)H(0)| = \infty &\rightarrow k_{ar} = 1 \wedge k_{ap} = 0 \end{aligned} \quad (4.49)$$

É portanto possível ter no regime permanente de entradas em degrau os valores ideais de 1 e 0 para os ganhos de aceitação de referência e perturbação. Valores não ideais a um desvio relativo ε' menor que 1 por cada unidade de referência e perturbação são dados por:

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= \frac{\varepsilon}{y} = \frac{1}{1 + |C(0)H(0)|} \\ y_{rp} &= (1 - \varepsilon') \cdot y_{r0} + \varepsilon' \cdot p_0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Note-se que o desvio absoluto ε é dado por $\varepsilon = \varepsilon' y$. Para obter os valores ideais 1 e 0, examinamos a condição $|C(0)H(0)| = \infty$. Ela significa que na série das duas funções de transferência $C(s)H(s)$ há pelo menos um pólo em 0, ou uma relação de integração pura no tempo. Esta tanto pode existir “naturalmente” no processo, como por exemplo num caso de

controlo de posição de um corpo não submetido a processos elásticos, como ser colocada “artificialmente” no controlador como um integrador do erro. Em qualquer caso, esta situação pode ser vantajosa na medida em que esta propriedade do comportamento no regime permanente não depende de ganhos estáticos.

O projecto de controladores para sistemas requerendo modelos dinâmicos segue um padrão semelhante ao anteriormente referido para modelos estáticos, mas tem em conta as características próprias destes. Face a um problema de controlo em que o modelo do processo é

$$Y(s) = H(s)U(s) + P(s)$$

a primeira classificação a estabelecer é se $H(s)$ é instável, ou se é marginal ou estritamente estável.

Se $H(s)$ é instável, a primeira actividade do projecto é obter uma realimentação capaz de estabilizar o anel de realimentação. Nos outros casos, é usual passar directamente à determinação das taxas de rejeição e aceitação de perturbação e referência no regime permanente. E, em seguida, determinar se os ganhos no controlador implicados por essas taxas dão para o anel uma resposta transitória adequada, em particular, se a pressuposição de estabilidade para o anel se mantém.

Neste processo, o projectista tem à disposição uma gama vasta de conceitos e métodos para estabelecer as funções de transferência do controlador. Um conceito ou método define um tipo de controlo. Os tipos mais simples e mais correntes de controlo são os do tipo ‘On-Off’ e do tipo PID. Estes tipos de controladores encontram-se comercialmente disponíveis numa vasta gama de dispositivos e variadas implementações. Examinamos agora uma sequência de interesse num texto introdutório como este.

O controlo ‘On-Off’

O controlador ‘On-Off’ não é definido por uma função de transferência $C(s)$ porque não é linear! Pertence à família dos controladores comutadores. Este controladores são não-lineares.

O controlador ‘On-Off’ a 2 pontos, que vamos examinar, pressupõe que a variável de actuação $u(t)$ pode tomar dois valores u^+ e 0 correspondentes aos valores u_{on} e u_{off} da variável de comando. O controlador é um comparador do valor de $e(t)$ com 0,

$$\begin{aligned} y_r(t) > y(t) &\rightarrow e(t) > 0 \rightarrow u(t) = u^+ \\ y_r(t) &\leq y(t) \rightarrow e(t) \leq 0 \rightarrow u(t) = 0 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Ao que se adiciona a margem de histerese h , o único parâmetro do controlador, de forma a poder estabelecer um compromisso entre qualidade de controlo e desgaste do actuador, veja-se a Figura 4-13, que define a operação do controlador.

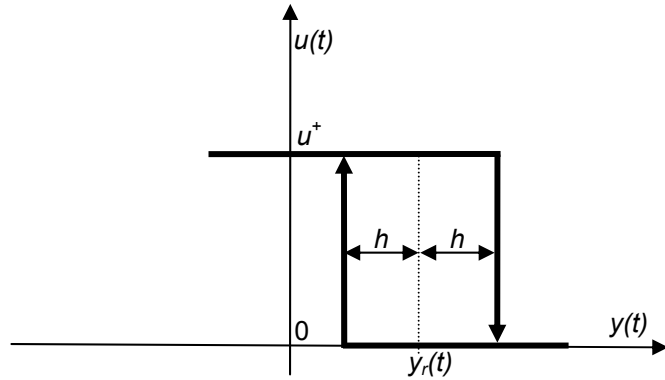


Figura 4-13 “Função de transferência” no domínio dos tempos dum controlador ‘On-Off’ a 2 pontos.

Conceptualmente simples, o controlo On-Off é a base da sofisticada técnica de controlo por deslizamento de modos. Na forma da descrição da Figura 4-13 o controlo ‘On-Off’ só pode ser aplicado a sistemas que aceitem modelos $H(s)$ estritamente estáveis. Para modelos de primeira ordem sem atraso puro, esta forma tem a desejável propriedade de uma comutação provocar uma inversão imediata do sinal da derivada de $y(t)$ pelo que a evolução da variável fica confinada ao intervalo $y_r(t) \pm h$, em que h é a margem de histerese. Fazemos então $h = \varepsilon$, a tolerância aceitável no erro e avaliamos o impacto desta decisão na frequência f_c de comutação do actuador, excluindo possíveis efeitos devidos à perturbação p .

Nesta situação, a frequência de comutação pode ser determinada a partir das respostas livre e total $Y_L(s)$ e $Y(s)$. Quando $u(t) = 0$, y segue a resposta livre $y_L(t)$. O valor do intervalo de tempo t_{off} em que o actuador está desligado, é o valor do intervalo de tempo em que o sistema está em resposta livre. Dada a sua expressão ser para um modelo de primeira ordem com constante de tempo T :

$$y_L(t) = y(0)e^{-t/T} \quad (4.52)$$

temos que:

$$\begin{aligned} y(t_{off}) &= (y_r + h)e^{-t_{off}/T} = y_r - h \\ -t_{off}/T &= \ln \frac{y_r - h}{y_r + h} \\ t_{off} &= -T \ln \frac{y_r - h}{y_r + h} \end{aligned} \quad (4.53)$$

O valor do intervalo de tempo em que o actuador está ligado t_{on} é dado pela resposta total a um degrau de amplitude u^+ com condição inicial $y(0) = y_r - h$. Admitindo que $u^+ K_{rp} > y_r + h$:

$$\begin{aligned} y(t_{on}) &= u^+ K_{rp} (1 - e^{-t_{on}/T}) + (y_r - h) e^{-t_{on}/T} = y_r + h \\ e^{-t_{on}/T} &= \frac{u^+ K_{rp} - (y_r + h)}{u^+ K_{rp} + y_r - h} \\ t_{on} &= -T \ln \frac{u^+ K_{rp} - (y_r + h)}{u^+ K_{rp} + y_r - h} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Então

$$f_c = 2 \frac{1}{t_{off} + t_{on}} \quad (4.55)$$

As expressões acima também podem ser usadas como ponto de partida para determinar a partir de uma frequência de comutação f_c e de um valor máximo u^+ realizáveis por um actuador, que erro máximo $\varepsilon = h$ iria existir.

O controlo proporcional

Um controlador proporcional no erro tem $K(s) = 1/K_s$, $F(s) = 1$ e $C(s) = K_p$, o chamado ganho proporcional. Nestas condições

$$u(t) = K_p e(t) \quad (4.56)$$

Este controlador já foi encontrado! Como sendo o controlador a aplicar para um modelo de processo estático (4.36). Referiu-se então que o intervalo de valores do erro em que o sistema opera em modo linear é $E_l = [e^-, e^+] = \left[\frac{u^-}{K_p}, \frac{u^+}{K_p} \right]$.

Aplicado a um processo dinâmico este controlador dará o seguinte comportamento para $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{K_p H(s)}{1 + K_p H(s)} Y_r(s) + \frac{1}{1 + K_p H(s)} P(s) \quad (4.57)$$

Admitindo que $H(s)$ é estável, investigamos o valor de $|H(0)|$. Se este for ∞ – existência de uma integração pura em $H(s)$ – k_{ar} e k_{ap} , as taxas de aceitação e rejeição para referências e perturbações em degrau, têm os valores ideais 1 e 0. Temos então liberdade de usar o valor de K_p para o dimensionamento do comportamento no regime transitório.

Se $|H(0)|$ for finito e maior que 0, o valor de K_p tem de ser usado para determinar k_{ap} ou ε' . Ou $1 - \varepsilon'$. Note-se que se se fizer, analogamente a (4.42),

$$F(s) = \frac{1}{1 - \varepsilon'} \quad (4.58)$$

se pode obter ganho em regime permanente 1 para entradas em degrau.

O projecto estará acabado se o valor de K_p encontrado for compatível com uma boa estabilidade e resposta transitória do sistema realimentado.

Note-se que se $|H(0)|$ for 0, o sistema não é controlável no regime permanente: $k_{ar} = 0$ e $k_{ap} = 1$

O controlo proporcional-integral

Um controlador proporcional-integral (PI) no erro gera o sinal de comando pela adição de uma componente proporcional ao erro com um componente proporcional ao integral do erro pela expressão:

$$\begin{aligned} u(t) &= K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau = \\ &= K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau = \\ &= K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right) \end{aligned} \quad (4.59)$$

A função de transferência $C(s)$ vem:

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = \\ &= K_p \frac{T_i s + 1}{T_i s} = K_p \frac{s + 1/T_i}{s} \end{aligned} \quad (4.60)$$

Um controlador PI faz $C(0) = \infty$, pelo que k_{ar} e k_{ap} terão os valores ideais 1 e 0. Os valores de K_p e T_i serão usados para obter uma boa resposta transitória. Este controlador permite ter erros nulos a referências ou perturbações em degrau quando $0 < H(0) < \infty$.

Mas a sua introdução, pode tornar mais difícil obter um regime transitório satisfatório. Também encerra potencialmente o perigo de fazer a variável de actuação saturar, se por qualquer razão o erro se mantiver elevado durante muito tempo.

O controlo proporcional-derivativo

Um controlador proporcional-derivativo (PD) no erro gera o sinal de comando pela adição de uma componente proporcional ao erro com um componente proporcional à derivada do erro pela expressão ideal:

$$\begin{aligned}
u(t) &= K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} = \\
&= K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} = \\
&= K_p \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right)
\end{aligned} \tag{4.61}$$

A função de transferência $C(s)$ vem:

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p (1 + T_d s) \tag{4.62}$$

Este controlador introduz um zero em $-1/T_d$, e é não-causal. É usual aproximá-lo pela função de transferência causal, com $0.1 < \alpha < 0.3$, de ganho unitário:

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p \frac{T_d s + 1}{\alpha T_d s + 1} \tag{4.63}$$

Que introduz também um pólo em $-1/\alpha T_d$.

O controlo proporcional-derivativo permite melhorar a estabilidade e o comportamento transitório de um sistema realimentado se for correctamente aplicado. Torna, no entanto, o sistema mais sensível a ruído de medida da variável controlada e provocará elevadas excursões da variável de actuação se a referência variar rapidamente (o que provoca elevados valores de derivada de erro). Por esta última razão, é usual usar o controlo proporcional no erro e derivativo na realimentação.

$$U(s) = K_p E(s) + \frac{T_d s}{\alpha T_d s + 1} Y(s) \tag{4.64}$$

Nesta estrutura a acção derivativa não é aplicada à variável de referência. Em qualquer dos casos, o valor de T_d será escolhido de forma a melhorar o amortecimento do anel de realimentação.

Controlo IPD

O mesmo argumento que se levanta em favor de excluir a variável de referência da acção derivativa pode ser usado para a acção proporcional. Esta pode dar origem a excursões elevadas da variável de actuação se a variável de referência tiver variações de grande amplitude. Deixando apenas uma fracção β da acção proporcional a multiplicar a variável de referência aplicando acção integral temos:

$$U(s) = \beta K_p \frac{s + 1/T_i}{s} E(s) + K_p \frac{T_d s + 1}{\alpha T_d s + 1} Y(s). \tag{4.65}$$

Nas formas que usam acções na realimentação, determinam-se primeiro os parâmetros das acções na realimentação, numa perspectiva de melhorar o regime transitório na resposta a perturbações e a estabilidade do sistema. Depois determinam-se os parâmetros da realimentação no erro, de forma a estabelecer os parâmetros em regime permanente e de resposta a variações da referência.

4.4 Exercícios

- 4.1 De acordo com a definição dada no início do capítulo, diga qual ou quais os sistemas estudados e modelizados no Capítulo 2, Exemplos 2-6 a 2-14 e Exercícios 2-15 a 2-17, que *não* apresentam realimentação natural.
- 4.2 Para o exemplo do ascensor desenhe graficamente dois exemplos (1 de subida e 1 de descida) do comportamento desejado da velocidade do mesmo $v_R(t)$. Tome em conta que:
 - i) A velocidade nominal (e máxima) de transporte do ascensor é de 2 m/s.
 - ii) A aceleração máxima admissível é de 0,5g. No entanto, não são aceitáveis variações bruscas de aceleração, devendo esta variar linearmente com o tempo. Sob esta restrição, quanto tempo demora o ascensor a atingir a velocidade nominal? Que deslocamento necessita de realizar?
 - iii) A distância entre pisos num edifício é usualmente de 3 m. Como deverá ser a evolução da velocidade se o ascensor for de um piso ao imediatamente superior (inferior)?
- 4.3 Verifique se as equações (4.6) estão correctas. Isto é, faça um desenho mostrando que a movimentação coordenada dos dois eixos do “plotter” traçará de facto uma circunferência de 0,1 m de raio.
- 4.4 Suponha que num sistema mecânico similar ao do Exemplo 4-5 é $M = 100$ Kg; $K_e = 2000$ N/m; a força que move a massa é apenas o seu peso. Calcule o valor de ω_n , neste caso. Suponha-se que se pretende um comportamento de resposta livre em que $\zeta = 0.7$. Qual deve ser o valor de B ? Esboce a resposta livre pretendida.
- 4.5 Diga porque não seria possível controlar os seguintes sistemas referidos no Capítulo 2 em ciclo aberto (ou por antecipação da referência):
 - i) O sistema hidráulico do Exemplo 2-8;
 - ii) O sistema mecânico do Exemplo 2-12 em modo de controlo de posição;
 - iii) Os sistemas mecânicos dos Exercícios 2-16 e 2-17.
- 4.6 Diga que problemas se encontrariam se tentássemos controlar os sistemas dos Exemplos 2-10, 2-12 (velocidade) e 2-14 e dos Exercícios 2-15, 2-16 e 2-17 em ciclo aberto (antecipação da referência).
- 4.7 Suponha que iríamos controlar o sistema térmico Exemplo 2.10 em ciclo aberto. A temperatura ambiente é de 20°. A resistência térmica é de 2°/KW e a constante de tempo de 100 s. Pretende-se uma temperatura dentro da estufa de 80°. Qual deve ser o ganho K_c do controlador a aplicar? Que aconteceria à temperatura se a resistência térmica aumentasse de 10%?

- 4.8** Suponha que se pretende controlar um sistema hidráulico do tipo apresentado no Exemplo 2-8. Tem-se que $A = 4 \text{ m}^2$ e que a abertura e fecho das válvulas pode fazer variar R_h^* entre valores em que o consumo de água $q_o \in [0.001, 0.010] \text{ m}^3/\text{s}$. Aplica-se controlo ‘On-Off’ com a margem de histerese h ajustada de forma a permitir variações de 10% acima e abaixo do valor de referência de altura $h_{r0} = 2 \text{ m}$. Quando a motobomba está ligada $q_i(t) = 0.015 \text{ m}^3/\text{s}$. A que frequências de comutação f_{c1} e f_{c2} se vai fazer funcionar a motobomba quando o fluxo q_o se mantiver constante em cada um dos valores mínimo e máximo indicado? Quais os tempos de t_{off} e t_{on} em cada um dos casos?

Em todos os exercícios seguintes, comece por fazer um esquema dos elementos físicos que constituirão o sistema realimentado e das suas conexões. Em seguida represente o esquema como um diagrama de blocos do tipo apresentado na Figura 4-12, pois em todos se suporá fazer a realimentação unitária (quanto à medida da variável controlada).

- 4.9** Estude a aplicação do controlo proporcional à velocidade angular ω de um sistema mecânico do tipo apresentado no Exemplo 2.12. Considere os seguintes valores dos parâmetros, para as unidades das variáveis expressas no Sistema Internacional: $J = 1$; $B = 0.5$; $K_m = 10$. Considere que a variável de perturbação é um binário m_p que se soma ao binário motor m_m . Determine a expressão geral de $Y(s)$ dada pela realimentação negativa. Que valor de K_p é necessário para reduzir o efeito de uma perturbação unitária em degrau a 0.02 rad/s em regime permanente? Qual o valor máximo da resposta à perturbação gerado em $m_m(t)$? Qual o domínio de validade E_l do modelo se os valores efectivos da tensão de entrada no amplificador forem $U_e = [-20, 20]$?
- 4.10** Estude a aplicação do controlo proporcional à posição angular θ de um sistema mecânico do tipo apresentado no Exemplo 2.12. Considere os mesmos valores dos parâmetros, para as unidades das variáveis expressas no Sistema Internacional: $J = 1$; $B = 0.5$; $K_m = 10$. Considere que a variável de perturbação é um binário m_p que se soma ao binário motor m_m . Determine a expressão geral de $Y(s)$ dada pela realimentação negativa? Que valor de K_p é necessário para reduzir o efeito de uma perturbação unitária em degrau a 0.02 rad em regime permanente? Qual o valor máximo da resposta à perturbação unitária gerado em $m_m(t)$? Qual o domínio de validade E_l do modelo se os valores efectivos da tensão de entrada no amplificador forem? Qual a resposta a uma entrada de referência em degrau unitário? Fica confinada ao domínio de validade do modelo? Tem oscilações?
- 4.11** Considere o sistema para fazer levitar uma pequena esfera metálica no Exercício 2-16. Admita que $M = 0.1$. O amplificador gera uma força constante e igual a $0.1g$. A esta força é adicionada uma força dependente da tensão $f(t) = 0.1u(t)$. Então

$$X(s) = \frac{K_m}{Ms^2} U(s) = \frac{1}{s^2} U(s).$$

Suponha que $U_e = [-20, 20]$. Suponha aplicado controlo proporcional no erro, com $x_r(t) = 0$. Mostre que nesta situação, o anel de realimentação não pode ser estritamente estável e apresentará oscilações continuadas. Qual pode ser a amplitude máxima destas oscilações para o modelo linear ser válido?

Mostre que é possível estabilizar estritamente o anel de realimentação se usar controlo proporcional-derivativo quer no erro quer na realimentação. Neste caso, as duas versões são idênticas porque $x_r(t) = 0$.