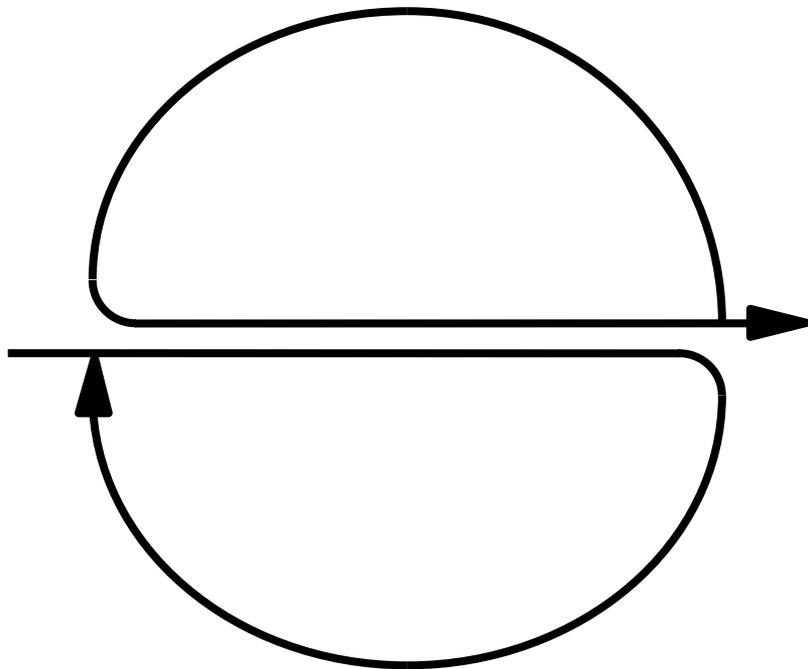


Elementos de Controlo Automático

3 – Dinâmica LIT de Sistemas



PAULO GARRIDO

Escola de Engenharia da Universidade do Minho

Elementos de Controlo Automático / 3 Dinâmica LIT de Sistemas

© 2005 Paulo Garrido – Universidade do Minho

Informação de direitos de autor.

Esta publicação, incluindo a faculdade de impressão, destina-se aos alunos dos cursos de engenharia da Universidade do Minho.

Pode ser utilizada por outras pessoas para fins exclusivos de aprendizagem, desde que o documento seja integralmente mantido. Qualquer outra utilização sem autorização do autor é ilícita. Este pode ser consultado em pgarrido@dei.uminho.pt

Índice

3.1 Modelos LIT em previsão de comportamento.....	1
3.2 Modelos LIT no domínio s	5
Determinação da transformada de Laplace de uma função $f(t)$	7
Determinação da antitransformada de uma função $F(s)$	13
Expansão em fracções parciais.....	13
Caso 1: as raízes s_i de $D(s)$ são todas diferentes	14
Caso 2: algumas das raízes de $D(s)$ são repetidas (múltiplas)	17
Função de transferência.....	18
Forma zero-polar de uma função de transferência.....	21
3.3 Modelos LIT e análise da influência dos parâmetros	22
Resposta ao impulso de Dirac	23
Resposta ao Dirac como uma soma de modos	25
Estabilidade de modelos LIT	28
Critério fundamental de estabilidade	28
Regime transitório e regime permanente da resposta forçada	29
Ganho ao degrau unitário em regime permanente	29
Ganho à sinusóide em regime permanente.....	30
3.4 Modelos LIT de uso comum	31
Integrador realimentado	31
Resposta livre	32
Resposta forçada	34
Modelo com tempo de atraso	36
O oscilador subamortecido.....	36
Resposta livre	38
Resposta forçada ao degrau unitário	39
3.5 Diagramas de blocos no domínio de Laplace	41
Equivalência de pontos de soma	42
Equivalência série	42

Equivalência paralelo	43
Equivalência de um anel	43
Deslocamento de um ponto de soma algébrica	45
3.6 Exercícios.....	46

3

DINÂMICA LIT DE SISTEMAS

Objectivos *Modelo LIT SISO de ordem n. Problema da previsão do comportamento do sistema. Modelos LIT no domínio s. Transformada de Laplace. Resposta forçada e função de transferência. Pólos e zeros. Problema da análise da influência dos parâmetros no comportamento de um sistema. Resposta ao Dirac e função de peso. Comportamento estável e instável. Estabilidade estrita e marginal e critério de estabilidade. Regime transitório e regime permanente em respostas a entradas lineares. Ganho em regime permanente ao degrau e à sinusóide. Respostas livre e ao degrau de modelos de primeira e segunda ordem. Álgebra de modelos no domínio s.*

3.1 Modelos LIT em previsão de comportamento

O resultado de um processo de modelização de um sistema, em que não há fenómenos de transporte e que aceita um modelo LIT SISO, é uma equação diferencial de ordem n . Seja qual for a equação que se obteve, ela deve poder ser normalizável como um caso particular da seguinte expressão geral.

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \quad (3.1)$$

Nesta equação é obrigatoriamente $n \geq m$, caso contrário o modelo não será causal. O valor de n é dito a *ordem* do modelo. Como podemos utilizar uma tal equação?

No primeiro capítulo, disse-se que os modelos se usam para predizer (ou prever) o comportamento dos sistemas. Nesta secção, vamos estudar uma maneira de *formular* este

problema. Não é fácil formular um problema, independentemente dos métodos de solução de que se dispõe para o resolver – e não o tentaremos fazer aqui. Assim, vamos formular o problema da predição ou previsão do comportamento de um sistema, pressupondo que dispomos, ou que nos é possível vir a dispor, de um modelo LIT para o resolver. Mais precisamente, um modelo da forma (3.1)¹.

Um modelo comportamental tem variáveis de saída e variáveis de entrada, se for externo. Tem também variáveis de estado se for interno. Em qualquer caso, as variáveis de entrada não podem ser consideradas como definindo comportamentos do sistema, porque, por definição, a sua evolução é determinada por causas exteriores ao sistema. Segue-se que o comportamento de um sistema, que um modelo retrata, é definido pelas n variáveis de estado do modelo. Um modelo externo não tem variáveis de estado, mas, sendo linear, a saída $y(t)$ mais as suas derivadas até à $n-1$ podem funcionar como tal, para definirem o comportamento.

Qualquer problema de previsão se põe a partir de um instante de início de contagem do tempo t_0 . Este é dito o instante inicial. Porque o modelo é invariante no tempo², os resultados que o modelo dará, como previsão do comportamento, não serão afectados pelo valor que se atribui a t_0 . Então, podemos assumir i) $t_0 = 0$.

Assumimos também ii) que, neste instante, o valor das variáveis de estado é conhecido. Se estivermos a lidar com um modelo SISO, assumimos que o valor do vector

$$\mathbf{y}(t) = [y(t) \ y'(t) \ \cdots \ y^{(n-1)}(t)], \quad (3.2)$$

formado pela saída $y(t)$, mais as suas derivadas até à $n-1$, é conhecido para o instante 0. Isto é:

$$\mathbf{y}(0) = [y(0) \ y'(0) \ \cdots \ y^{(n-1)}(0)] = \mathbf{y}_0 = [y_0 \ y'_0 \ \cdots \ y_0^{(n-1)}]. \quad (3.3)$$

Assume-se também iii) que o valor da variável de entrada $u(t)$ é 0 para $t < 0$.

Podemos agora por o problema da predição ou previsão de duas formas. Na primeira assumem-se as condições:

iv) $\mathbf{y}(0) \neq \mathbf{0}$ (a saída ou alguma das suas derivadas até à $n-1$ não são 0 para $t = 0$);

v) $u(t) = 0$ para $t \geq 0$.

¹ Isto não significa que as ideias apresentadas não sejam válidas, com eventuais modificações, para o caso de outros modelos serem necessários para descrever o sistema.

² Esta afirmação demonstra-se, mostrando que a previsão gerada só depende da diferença $t_f - t_0$ e não de t_0 .

Esta situação corresponde a o sistema estar em movimento em $t=0$ e ser deixado evoluir sem aplicação de um estímulo externo da nossa parte.

O problema é: qual a *resposta livre* do modelo: $y(t) = y_L(t)$?

A Figura 3-1 ilustra esta forma do problema de previsão. Na prática, o problema é mais favorável do que enunciado acima, pois existe um instante de tempo final t_f , para a previsão, que é também a medida do seu intervalo $t_f - t_0 = t_f$.

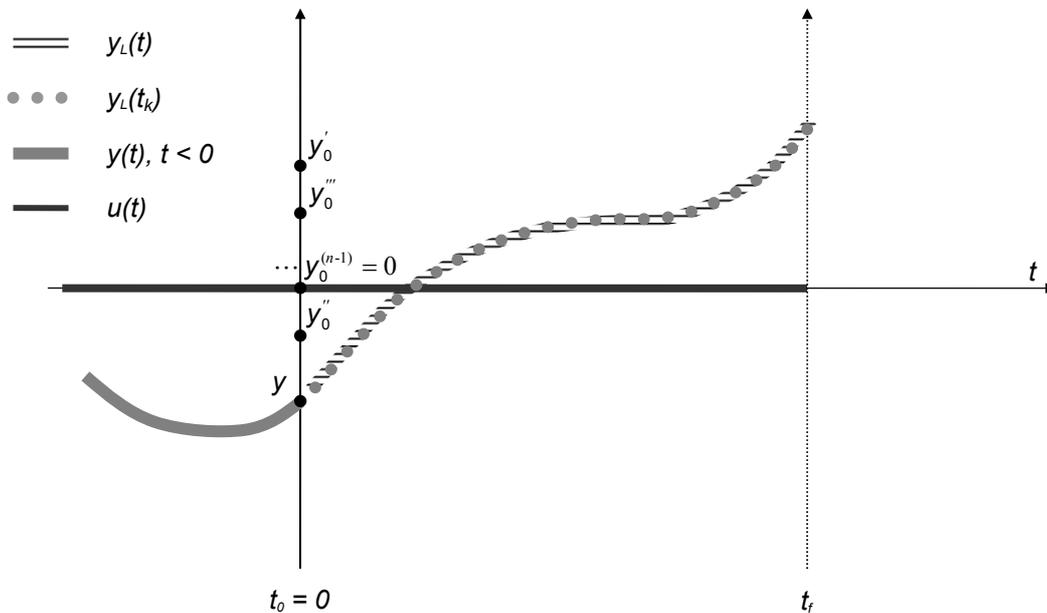


Figura 3-1 Ilustração do problema de previsão de comportamento: resposta livre. Conhecem-se os n valores de $y(t)$ e das suas derivadas até à $n-1$ no instante 0. Presume-se que $y(t)$ e as suas derivadas até à n , não são influenciadas por variáveis de entrada: $t < t_f \rightarrow u(t) = 0$ Pretende-se uma predição ou previsão de $y(t)$ no intervalo $[0, t_f]$.

Na segunda forma, as condições iv) e v) são diferentes

iv) $y(0^-) = \mathbf{0}$ (a saída e as derivadas até à $n-1$ são 0 para $t < 0$);

v) $u(t) = u_1(t)$ para $t \geq 0$.

Esta situação corresponde a o sistema estar imóvel³, e ser submetido a um estímulo específico: a variável $u(t)$ passa a evoluir ao longo do tempo como a função $u_1(t)$.

O problema é: qual a *resposta forçada* do modelo: $y(t) = y_F(t)$?

A Figura 3-2 ilustra esta forma do problema de previsão.

³ Como a entrada $u(t)$ é 0, a derivada de ordem n na equação (3.1), também o será.

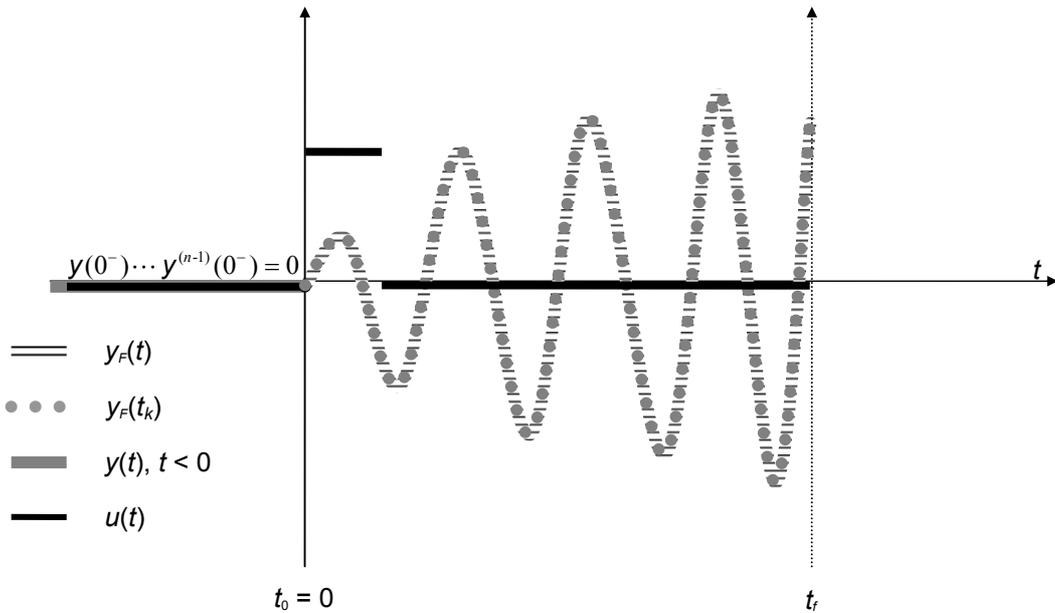


Figura 3-2 Ilustração do problema de previsão de comportamento: resposta forçada. Conhecem-se os n valores de $y(t)$ e das suas derivadas até à $n-1$ no instante 0^- e estes são todos nulos. Esta situação é um ponto fixo do comportamento do sistema se ele aceita o modelo (3.1). O sistema está e esteve imóvel: $t < 0 \rightarrow y(t) = 0$. Pretende-se uma previsão ou previsão de $y(t)$ no intervalo $[0, t_f]$ conhecendo-se a evolução de $u(t)$ no mesmo intervalo.

A previsão tanto podem ser dada quer como uma função do tempo contínuo $y_L(t)$, $y_F(t)$, quer como uma função do tempo discreto $y_L(t_k)$, $y_F(t_k)$. As últimas podem ser produzidas por modelos em tempo discreto, usados em computador para simulação – a simulação produz a previsão.

Um modelo LIT do tipo (3.1) gera como previsão uma função do tempo contínuo em forma fechada. Quer isto dizer que $y(t)$ é dada por uma expressão simbólica (de tamanho finito) em que y depende explicitamente de t (em 0 a t_f). Por exemplo, uma soma de exponenciais e funções potência⁴ do tempo.

$$y_L(t) = -2e^{-t} + 5 + 0.01t + 0.01e^{+0.1t} \quad (3.4)$$

Admitiremos que se podem admitir como previsões também expressões em que os valores dos parâmetros do sistema não são conhecidos. Por exemplo, uma função sinusoidal de amplitude crescendo linearmente com o tempo, mas cuja frequência se desconhece:

$$y_p(t) = t \text{ sen } \omega t . \quad (3.5)$$

Estas previsões, dependentes de um ou mais parâmetros, são úteis de várias formas. Por exemplo, neste caso, indicando que é necessário medir ou calcular ω para obter uma previsão

⁴ Neste caso: $5 = 5t^0$, $0.01t = 0.01t^1$

concreta. Supondo que o resultado da medida seria 5, realizar uma previsão, semelhante à indicada na Figura 3-2, seria possível a partir da expressão

$$y_F(t) = t \operatorname{sen} 5t \quad (3.6)$$

Estando y expressado desta forma, é possível indicar o valor de y para valores de t arbitrário – por exemplo para os instantes t_k das sequências $y_L(t_k), y_F(t_k)$. Também é possível determinar qualquer modelo discreto que se deseje, a partir do modelo contínuo, desde que $u(t)$ seja conhecida em cada intervalo de tempo $t_k - t_{k-1}$.

Para se explorar esta capacidade dos modelos do tipo (3.1) de produzir previsões simbólicas e explícitas em relação ao tempo, é possível usar a teoria clássica de solução de equações. Pode reconhecer-se que, na linguagem desta teoria, a solução da equação homogénea para condições iniciais conhecidas, produz uma previsão de resposta livre, e o encontrar uma solução particular, corresponde a produzir uma previsão da resposta forçada.

Neste livro vamos explorar ferramentas mais poderosas, para resolver este e outros problemas. Estas ferramentas são um *outro tipo de modelos* LIT que ainda não apresentamos: os modelos na variável complexa s , modelos *no domínio s* ou modelos em Laplace.

3.2 Modelos LIT no domínio s

Os modelos LIT no domínio s podem pôr-se em correspondência com os modelos LIT *no domínio do tempo*. Modelos como o dado pela equação diferencial (3.1) ou outros, são ditos no domínio do tempo, porque as evoluções das variáveis comportamentais do modelo são expressas por funções (reais) do tempo (real), como nos exemplos (3.4) e (3.5).

Nos modelos no domínio s , as evoluções das variáveis comportamentais do modelo são expressas por funções complexas da variável complexa s . Funções correspondentes às evoluções nos exemplos referidos acima, são:

$$Y_L(s) = \frac{-2}{s - (-1)} + \frac{1}{s - 0} + \frac{0.01}{(s - 0)^2} + \frac{0.01}{s - (+0.01)}, \quad (3.7)$$

$$Y_p(s) = \frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}. \quad (3.8)$$

É costume escrever a primeira sem explicitar as raízes dos denominadores:

$$Y_L(s) = \frac{-2}{s + 1} + \frac{1}{s} + \frac{0.01}{s^2} + \frac{0.01}{s - 0.01}. \quad (3.9)$$

Como estes exemplos mostram, os símbolos usados para as variáveis no domínio s , utilizam a mesma letra que a usada no domínio do tempo, mas são *sempre* letras maiúsculas. Exceção é a própria variável s , que tem uma função análoga à de t no domínio do tempo.

A chave para estabelecer as úteis correspondências entre modelos nos dois domínios é a transformada de Laplace. Esta é algo semelhante a um operador temporal na medida em que associa univocamente a uma função outra função. Mas enquanto um operador temporal associa a uma função outra função do tempo, por exemplo,

$$\frac{d}{dt} : f(t) \mapsto \frac{df(t)}{dt}, \quad (3.10)$$

a transformada de Laplace associa a uma função do tempo uma função complexa de variável complexa:

$$\mathcal{L} : f(t) \mapsto F(s) \quad (3.11)$$

A transformada de Laplace *à direita*⁵ de uma função $f(t)$ é *definida* pelo integral seguinte, em que s é a variável complexa:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt. \quad (3.12)$$

Restringiremos a aplicação da transformada de Laplace a funções causais do tempo, isto é, a funções que satisfazem

$$\forall t < 0, f(t) = 0. \quad (3.13)$$

Se o integral em (3.12) converge, então a transformada de Laplace *existe* e é uma função complexa de variável complexa $F(s)$:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s).$$

Exemplo 3-1: transformada do degrau unitário.

A função impulso de Heaviside ou degrau unitário $h(t)$ define-se por

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } t \geq 0 \\ 0, & \text{para } t < 0 \end{cases}. \quad (3.14)$$

Aplicando (3.12):

$$\mathcal{L}(h(t)) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s} (0 - e^{-s \cdot 0}) = \frac{1}{s} \quad (3.15)$$

⁵ Diz-se transformada de Laplace *à direita*, por os limites de integração serem 0 e ∞ . A transformada de Laplace *bilateral* tem por limites de integração $-\infty$ e $+\infty$. Limitando-nos a funções causais, as duas definições são idênticas.

Calculemos alguns valores desta função, para obtermos alguma sensibilidade para a sua forma.

s	$j2$	j	$j0.5$	-2	-1	-0.5	$-j2$	$-j$	$-j0.5$
$1/s$	$-j0.5$	$-j$	$-j2$	-0.5	-1	-2	$j0.5$	j	$j2$

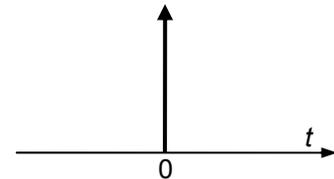
Determinação da transformada de Laplace de uma função $f(t)$

No contexto de utilização dos modelos LIT, a obtenção da transformada de Laplace de uma função arbitrária $f(t)$ só raramente usa a definição. As funções de uso mais geral são de dois tipos. O primeiro tipo só tem uma função: o impulso de Dirac, $\delta(t)$.

O impulso de Dirac pode ser visto como uma idealização da transmissão *instantânea* (num intervalo de tempo de duração 0) de uma quantidade finita de energia (o que implica uma potência infinita aplicada num instante de tempo). Matematicamente o impulso de Dirac define-se por

$$\begin{cases} \forall t \neq 0, \delta(t) = 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

O valor de $\delta(t)$ é nulo se $t \neq 0$. O seu valor em $t = 0$ é tal que o integral de $-\infty$ a $+\infty$ soma 1. Intuitivamente, o valor de $\delta(0)$ é infinito. A representação gráfica do impulso de Dirac costuma ser feita por uma seta vertical, situada no instante de aplicação, como na figura ao lado.



Um impulso de Dirac pode ser aproximado de muitas formas. Por exemplo, por um impulso $i(t)$ de largura h e amplitude A , com $A \cdot h = 1$:

$$i(t) = \begin{cases} A, & \text{para } t \in [0, h[\\ 0, & \text{para } t \notin [0, h[\end{cases} \quad (3.17)$$

A aproximação será tanto melhor, quanto menor for o intervalo de tempo h .

A transformada de Laplace do impulso de Dirac é a função que associa a todos os números complexos o número complexo $(1, 0)$. Usualmente escreve-se como:

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1 \quad (3.18)$$

O segundo tipo de funções, que usualmente se usa no contexto de modelos LIT, tem um número infinito de funções. São todas as funções que se podem obter como *somas pesadas*⁶ de algum caso concreto da seguinte expressão geral:

$$b(t) = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{s_i t} \quad \text{com} \quad \begin{cases} n = 1, 2, \dots \\ s_i \in \mathbb{C} \\ t < 0 \rightarrow b(t) = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Em $b(t)$, m é uma variável sobre os naturais, s_i é um valor complexo, $s_i = \sigma_i + j\omega_i = r_i e^{j\theta_i}$. A última condição em (3.19) é necessária para garantirmos que $b(t)$ é uma função causal.

Se $s_i \in \mathbb{R}$, $b(t)$ é uma função real do tempo. Seja $n=1$, $s_i = \sigma_i$. Então a expressão em (3.19) fica

$$b(t) = \begin{cases} e^{\sigma_i t}, & \text{para } t \geq 0 \\ 0, & \text{para } t < 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Ela representa:

- i) exponenciais crescentes para $t \geq 0$, se $\sigma_i > 0$;
- ii) exponenciais decrescentes para $t \geq 0$, se $\sigma_i < 0$;
- iii) a função degrau unitário⁷ ou impulso de Heaviside se $\sigma_i = 0$; neste caso $b(t) = h(t)$.

Se $n=2$ e $s_i = 0$, $b(t)$ é chamada a rampa unitária:

$$f(t) = v(t) = \begin{cases} t, & \text{para } t \geq 0 \\ 0, & \text{para } t < 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

Se $s_i \in \mathbb{C}$, $b(t)$ é uma função complexa do tempo. A soma pesada de funções correspondentes a valores complexos conjugados s_i e s_i^* , permite representar funções com componentes sinusoidais. Seja por exemplo, $n=1$, $\sigma_i = 0$, $\omega_i > 0$. Tem-se:

$$\begin{aligned} b_i(t) &= e^{s_i} = e^{j\omega_i t} = \cos \omega_i t + j \text{sen } \omega_i t \\ b_i^*(t) &= e^{s_i^*} = e^{-j\omega_i t} = \cos \omega_i t - j \text{sen } \omega_i t \end{aligned} \quad (3.22)$$

A partir de agora, e por brevidade de escrita e de leitura, assumiremos sempre na escrita das funções retiradas de (3.19), estar implícito que $t < 0 \rightarrow b(t) = 0$. Formemos agora a soma das funções em (3.22), pesando cada parcela com a constante 1/2. Obtém-se a expressão de Euler para o co-seno:

⁶ Uma soma pesada é uma soma em que se multiplica cada uma das parcelas por uma constante ou peso. Também se chama combinação linear. Exemplo: $f(t) = \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$.

⁷ Note-se que $b(t)$, é 0 para $t < 0$.

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2}b_i(t) + \frac{1}{2}b_i^*(t) = \\
 &= \frac{1}{2}e^{j\omega_i t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_i t} = \frac{1}{2}(e^{j\omega_i t} + e^{-j\omega_i t}) = \\
 &= \cos \omega_i t
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Pesemos agora cada parcela com as constantes $1/(2j)$ e $-1/(2j)$. Obtém-se a expressão de Euler para o seno:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2j}b_i(t) - \frac{1}{2j}b_i^*(t) = \\
 &= \frac{1}{2j}e^{j\omega_i t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_i t} = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_i t} - e^{-j\omega_i t}). \\
 &= \text{sen } \omega_i t
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Raciocinando no sentido inverso, podemos obter a representação de qualquer função sinusoidal em termos da soma pesada de uma função $b_i(t)$ e, digamos, da sua conjugada, $b_i^*(t)$. Por exemplo, a função em (3.23), mas com amplitude A e fase inicial ϕ :

$$\begin{aligned}
 A \cos(\omega_i t + \phi) &= \frac{A}{2}(e^{j(\omega_i t + \phi)} + e^{-j(\omega_i t + \phi)}) = \frac{A}{2}(e^{j\omega_i t} e^{j\phi} + e^{-j\omega_i t} e^{-j\phi}) = \\
 &= \frac{Ae^{j\phi}}{2}e^{j\omega_i t} + \frac{Ae^{-j\phi}}{2}e^{-j\omega_i t} = \\
 &= \frac{Ae^{j\phi}}{2}b(t) + \frac{Ae^{-j\phi}}{2}b^*(t)
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Neste caso, os pesos seriam constantes, sim, mas com valores complexos e conjugados.

Conhecidos os 2 tipos de funções, que formam uma base para as funções de modelos LIT, precisamos de conhecer mais 2 factos para determinar a transformada de Laplace de uma função $f(t)$. O primeiro é que as transformadas de Laplace dos dois tipos de funções que estudámos, são dadas pela tabela seguinte.

Tabela 3-1 Transformadas de Laplace da base de funções para modelos LIT.

$f(t)$		$F(s)$
$\delta(t)$	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	1
$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{s_i t}$	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$\frac{1}{(s-s_i)^n}$

O segundo é que a transformada de Laplace é um operador linear:

$$\mathcal{L}(\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)) = \lambda_1 \mathcal{L}(f_1(t)) + \lambda_2 \mathcal{L}(f_2(t)). \tag{3.26}$$

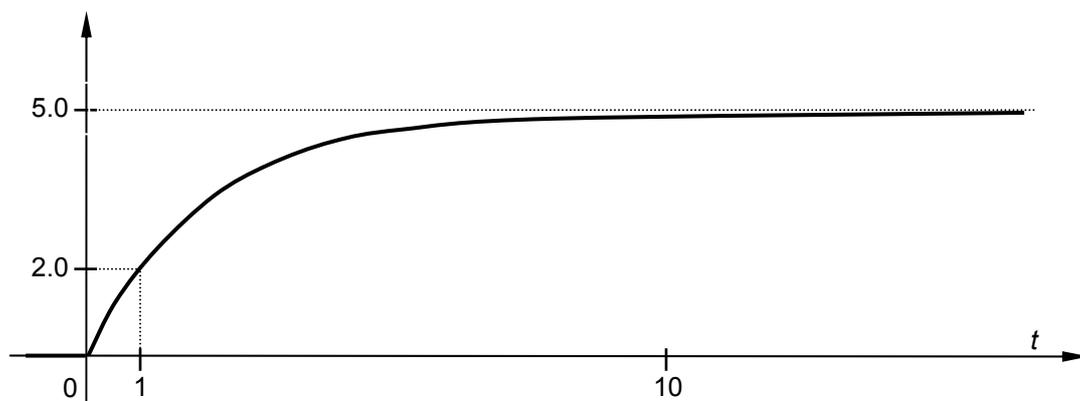
Agora, suponhamos que temos uma função $f(t)$ para a qual pretendemos conhecer $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$. O método básico enuncia-se como:

- i) Expressimos $f(t)$ como uma soma pesada de casos particulares $b_i(t)$ de (3.19), eventualmente com *um* impulso de Dirac;
- ii) Usamos a Tabela 3-1 para determinarmos a transformada de Laplace $B_i(s)$ de cada $b_i(t)$ (ou do Dirac);
- iii) Escrevemos $F(s)$ baseando-nos em (3.26);
- iv) Usualmente calculamos o somatório de fracções (e da constante) de que resultará uma fracção de polinómios na variável s , sem qualquer referência às suas partes real ou imaginária.

Vejam-se 2 exemplos.

Exemplo 3-2: transformada da resposta de um circuito RC passa-baixo.

O registo da tensão aos terminais de saída de um circuito é como na figura:



Assumindo que a curva ascendente é do tipo exponencial, podemos interpretar $v_o(t)$ como a soma de um degrau de amplitude 5 com uma exponencial cujo valor inicial é -5 e tende para 0, quando t cresce:

$$v_o(t) = 5.0 \cdot h(t) - 5.0 \cdot e^{\sigma_1 t}. \quad (3.27)$$

Para determinarmos o valor de σ_1 (que deve ser negativo), utilizamos a medida de $v_o(t)$ para $t=1$:

$$\begin{aligned} v_o(1) &= 2.0 = 5.0 - 5.0e^{\sigma_1 \cdot 1} \\ \sigma_1 &= \ln(3/5) = -0.5 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Portanto:

$$v_o(t) = 5.0 h(t) - 5.0 e^{-0.5t} \quad (3.29)$$

A transformada virá:

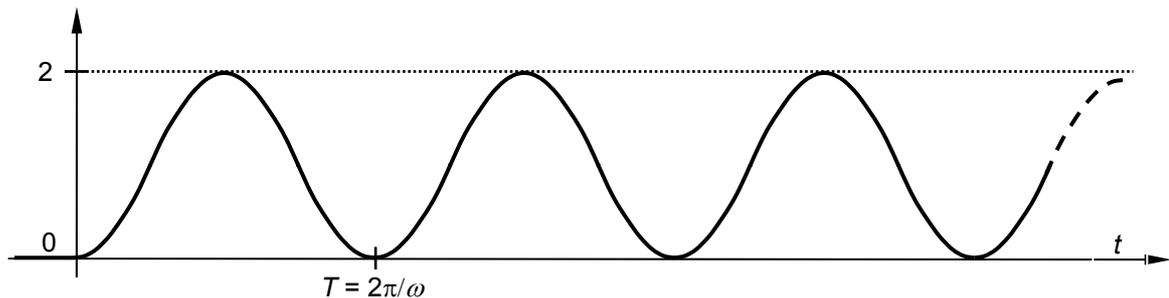
$$V_o(s) = \frac{5.0}{s} - \frac{5.0}{s - (-0.5)}. \quad (3.30)$$

O último passo:

$$\begin{aligned} V_o(s) &= \frac{2.5}{s(s+0.5)} = \\ &= \frac{2.5}{s^2 + 0.5s} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Exemplo 3-3: transformada da resposta de um oscilador harmónico.

A aplicação de um degrau unitário a um oscilador elementar LIT, ou oscilador harmónico, de período T (e, logo, frequência $\omega = 2\pi/T$), produz o seguinte registo:



Sendo as oscilações sinusoidais parece razoável supor que para $t \geq 0$

$$y_o(t) = 1 - \cos \omega t \quad (3.32)$$

Expandindo o co-seno

$$y_o(t) = e^0 - \frac{1}{2}e^{j\omega t} - \frac{1}{2}e^{-j\omega t} \quad (3.33)$$

Logo, a transformada vem:

$$Y_o(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2(s-j\omega)} - \frac{1}{2(s+j\omega)} \quad (3.34)$$

O último passo

$$\begin{aligned} Y_o(s) &= \frac{1}{s} - \frac{(s+j\omega)}{2(s-j\omega)(s+j\omega)} - \frac{(s-j\omega)}{2(s+j\omega)(s-j\omega)} = \\ &= \frac{1}{s} - \frac{(s+j\omega)+(s-j\omega)}{2(s+j\omega)(s-j\omega)} = \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \\ &= \frac{s^2 + \omega^2 - s^2}{s(s^2 + \omega^2)} = \\ &= \frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)} = \\ &= \frac{\omega^2}{s^3 + \omega^2 s} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Claro que se soubermos à partida que $\mathcal{L}(\cos \omega t) = s/(s^2 + \omega^2)$, podemos passar directamente à escrita da terceira linha de (3.35).

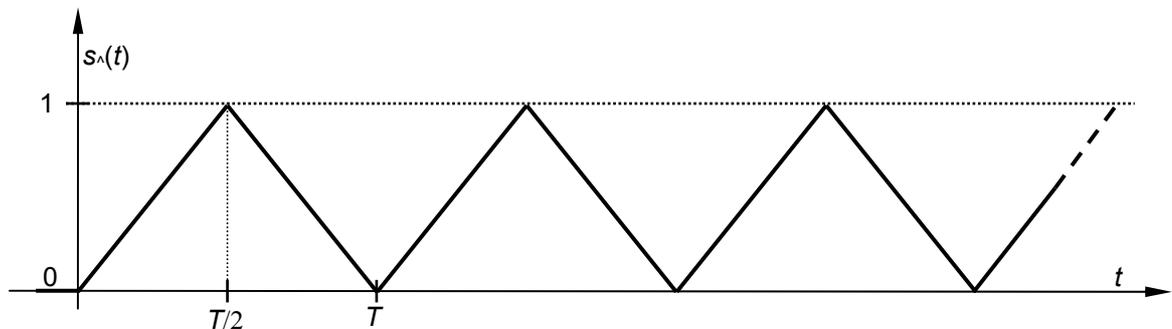
O método indicado não funciona se uma função estiver atrasada no tempo. A resposta para esta questão é dada pelo teorema do deslocamento no tempo das transformadas de Laplace, que se pode enunciar como:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) \rightarrow \mathcal{L}(f(t - T_a)) = F(s)e^{-sT_a}. \quad (3.36)$$

Na equação (3.36) T_a é o tempo de atraso e o símbolo \rightarrow lê-se “implica logicamente que”. Portanto, para se obter a transformada de Laplace de uma função atrasada no tempo de T_a segundos multiplica-se a transformada de Laplace da função original por e^{-sT_a} .

Exemplo 3-4: onda triangular.

Em Electrónica é muitas vezes usada a chamada onda triangular $s_\wedge(t)$ de período T :



Para se obter a sua transformada de Laplace é necessário expressar a função como uma soma (infinita) de funções. Intuitivamente, estas funções deverão ser rampas unitárias – ver definição em (3.21) – com factores de pesos adequados, cada rampa estando atrasada em relação à anterior de $T_a = T/2$.

Cada segmento de rampa tem declive $\pm\alpha = \pm 1/(T/2) = \pm 2/T$. No intervalo $[0, T/2]$:

$$s_\wedge(t) = \alpha v(t) \quad (3.37)$$

No intervalo $[T/2, T]$, é necessário somar à expressão em (3.37) uma rampa de declive -2α , atrasada de $T/2$, para se obter os valores da função no intervalo. Note-se que se a rampa tivesse declive $-\alpha$, o resultado da soma, no intervalo, teria valor constante e igual a 1. Fica então:

$$s_\wedge(t) = \alpha v(t) - 2\alpha v(t - T/2). \quad (3.38)$$

No intervalo $[T, 3T/2]$, é necessário somar à expressão em (3.38) uma rampa de declive $+2\alpha$, atrasada de T , para se obter os valores da função no intervalo:

$$s_\wedge(t) = \alpha v(t) - 2\alpha v(t - T/2) + 2\alpha v(t - T). \quad (3.39)$$

A partir $3T/2$, tudo se repete. Podemos escrever a expressão geral da função como:

$$\begin{aligned} s_\wedge(t) &= \alpha v(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2\alpha v(t - kT/2) = \\ &= \alpha \left[v(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2 v(t - kT/2) \right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

A transformada de Laplace vem:

$$\begin{aligned}
 S_{\wedge}(s) &= \alpha \left[\frac{1}{s^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{s^2} e^{-skT/2} \right] = \\
 &= \alpha \left[\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2} e^{-sT/2} + \frac{2}{s^2} e^{-sT} - \frac{2}{s^2} e^{-3T/2} + \frac{2}{s^2} e^{-2T} + \dots \right]
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Determinação da antitransformada de uma função $F(s)$

Para a exploração dos modelos no domínio s , é tão importante saber passar de uma transformada $F(s)$ à sua antitransformada $f(t)$, como passar de $f(t)$ a $F(s)$.

Dada uma função complexa de variável complexa $F(s)$, a sua transformada de Laplace inversa, ou antitransformada de Laplace, é definida por:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{-st} ds. \tag{3.42}$$

O integral sendo calculado num contorno apropriado, por exemplo uma recta paralela ao eixo $j\omega$. A expressão (3.42) permite interpretar a função $f(t)$ como uma soma infinita de exponenciais complexas, pesadas pelos valores de $F(s)$.

A forma usual de calcular antitransformadas não faz uso de (3.42), mas sim da Tabela 3-1. O método básico é, de alguma forma, o inverso do método que se apresentou para calcular a transformada de $f(t)$. Para se calcular a antitransformada $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$, procede-se da seguinte forma:

- i) Expressamos $F(s)$ como uma soma pesada de fracções da forma $B_{i,n}(s) = \frac{1}{(s-s_i)^n}$ (e uma constante);
- ii) Usamos a Tabela 3-1 para determinarmos a antitransformada de Laplace, $b_{i,n}(t)$, de cada $B_i(s)$ (e da constante que será um impulso de Dirac de “energia” igual à constante);
- iii) Escrevemos $f(t)$ baseando-nos na linearidade da transformada de Laplace;
- iv) Se for caso disso, reduzem-se pares de expressões de exponenciais complexas a expressões em senos ou co-senos.

Expansão em fracções parciais

Para realizar o passo i) referido acima é preciso compreender o seguinte. Em geral, uma transformada de Laplace $F(s)$ tem a forma de uma razão de polinómios em s (também chamada fracção racional em s):

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \tag{3.43}$$

No Exemplo 3-2, o resultado expresso em (3.31) tem $b_0 = 2.5$, $a_1 = 0.5$, $a_0 = 0$. No Exemplo 3-3, o resultado expresso em (3.35) tem $b_0 = \omega^2$, $a_2 = 0$, $a_1 = \omega^2$, $a_0 = 0$.

Um polinómio tanto pode escrever-se, ou como uma soma de potências de s , ou como um produto de monómios envolvendo as raízes do polinómio. Vejam-se os dois exemplos anteriores:

$$s^2 + 0.5s = (s-0)(s-(-0.5)) = s(s+0.5) \quad (3.44)$$

$$s^3 + \omega^2 s = (s-0)(s-(-j\omega))(s-(+j\omega)) = s(s+j\omega)(s-j\omega) \quad (3.45)$$

Outro exemplo: qual é o polinómio que tem raízes (ou zeros) em -2 , -1 , $+1$? Resposta:

$$\begin{aligned} (s-(-2))(s-(-1))(s-(+1)) &= (s+2)(s+1)(s-1) = \\ &= (s^2 + 3s + 2)(s-1) = \\ &= s^3 + 2s^2 - s - 2 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Segue-se que podemos escrever uma função $F(s)$ com os polinómios, numerador ou denominador, factorizados:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \\ &= b_m \frac{\overbrace{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}^{m \text{ factores}}}{\underbrace{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}_{n \text{ factores}}} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Notemos que Se $s = z_1 \vee s = z_2 \vee \dots \vee s = z_m$, então $F(s) = 0$. Por esta razão, z_1, z_2, \dots, z_m são chamados os *zeros* de $F(s)$.

Se $s = p_1 \vee s = p_2 \vee \dots \vee s = p_n$, então $\lim_{s \rightarrow p_i} |F(s)| = \infty$. Por esta razão, p_1, p_2, \dots, p_n são chamados os *pólos* de $F(s)$.

Quando uma função $F(s)$ está escrita com o numerador e o denominador factorizados, dizemos que está na *forma zero-polar* (porque os zeros e os pólos ficam explícitos).

O passo i) do cálculo de uma antitransformada envolve então converter uma fracção racional em s , $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, num soma pesada de fracções, cada fracção da forma indicada.

Chama-se a isto fazer a expansão de $F(s)$ em fracções parciais. Para a realizar, é necessário que o polinómio $D(s)$ esteja factorizado nas suas n raízes, ou pólos. Posto isto, e por comodidade de exposição, há dois casos a considerar.

Caso 1: as raízes s_i de $D(s)$ são todas diferentes

Neste caso a expansão toma a forma:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = A_0 + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s - s_i}. \quad (3.48)$$

Em (3.48), A_0, A_1, \dots, A_n são constantes (reais ou complexas) a serem determinadas.

Se $m < n$, isto é, se o grau do polinómio numerador, $N(s)$, for inferior ao grau do polinómio denominador, $D(s)$, então $A_0 = 0$. Se $m = n$, então $A_0 = b_m$.

As constantes A_1, \dots, A_n são determinadas da seguinte forma. Para cada A_i forma-se a função “resíduo”

$$F_i(s) = (s - s_i)F(s). \quad (3.49)$$

Então A_i é dada por

$$A_i = F_i(s_i). \quad (3.50)$$

Realizada a expansão em fracções parciais de $F(s)$, determinar a sua antitransformada $f(t)$ utilizando a Tabela 3-1 e a linearidade da transformada é quase imediato.

Exemplo 3-5: a antitransformada é uma soma de exponenciais reais.

Seja a transformada da resposta de um sistema dada por

$$Y(s) = \frac{6}{s^3 + 2s^2 - s - 2}. \quad (3.51)$$

É necessário factorizar o denominador:

$$Y(s) = \frac{6}{s^3 + 2s^2 - s - 2} = \frac{6}{(s+2)(s+1)(s-1)}. \quad (3.52)$$

Podemos formar a expansão como

$$Y(s) = \frac{A_1}{s+2} + \frac{A_2}{s+1} + \frac{A_3}{s-1}. \quad (3.53)$$

As funções “resíduos” são

$$Y_1(s) = \frac{6}{(s+1)(s-1)} \quad Y_2(s) = \frac{6}{(s+2)(s-1)} \quad Y_3(s) = \frac{6}{(s+2)(s+1)}. \quad (3.54)$$

Pelo que as constantes A_i têm os valores

$$\begin{aligned} A_1 &= Y_1(-2) = \frac{6}{(-1)(-3)} = 2 \\ A_2 &= Y_2(-1) = \frac{6}{(+1)(-2)} = -3. \\ A_3 &= Y_3(+1) = \frac{6}{(3)(2)} = 1 \end{aligned} \quad (3.55)$$

A antitransformada escrever-se-á

$$y(t) = 2e^{-2t} - 3e^{-t} + e^t. \quad (3.56)$$

Exemplo 3-6: a antitransformada é a soma de um degrau e um co-seno de fase inicial não-nula.

Seja a transformada da resposta de um sistema dada por

$$Y(s) = \frac{s+2}{s^3+4s}. \quad (3.57)$$

A factorização do denominador dá:

$$Y(s) = \frac{s+2}{s^3+4s^2} = \frac{s+2}{s(s^2+4)} = \frac{s+2}{s(s-j2)(s+j2)}. \quad (3.58)$$

Podemos formar a expansão como

$$Y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s-j2} + \frac{A_3}{s+j2}. \quad (3.59)$$

As funções “resíduos” são

$$Y_1(s) = \frac{s+2}{(s-j2)(s+j2)} \quad Y_2(s) = \frac{s+2}{s(s+j2)} \quad Y_3(s) = \frac{s+2}{s(s-j2)}. \quad (3.60)$$

Pelo que as constantes A_i têm os valores

$$\begin{aligned} A_1 &= Y_1(0) = \frac{2}{(-j2)(+j2)} = \frac{1}{2} \\ A_2 &= Y_2(+j2) = \frac{2+j2}{(+j2)(+j4)} = -\frac{2+j2}{8} = -\frac{1+j1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-j3\pi/4}. \\ A_3 &= Y_3(-j2) = \frac{2-j2}{(-j2)(-j4)} = -\frac{2-j2}{8} = -\frac{1-j1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{+j3\pi/4} \end{aligned} \quad (3.61)$$

A antitransformada escrever-se-á

$$y(t) = \frac{1}{2}h(t) + \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-j3\pi/4}e^{+j2t} + \frac{\sqrt{2}}{4}e^{+j3\pi/4}e^{-j2t} \quad (3.62).$$

Usando a fórmula de Euler para o co-seno podemos expressá-la mais compactamente – veja-se (3.25):

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}h(t) + \frac{\sqrt{2}}{4}e^{+j2t}e^{-j3\pi/4} + \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-j2t}e^{+j3\pi/4} = \\ &= \frac{1}{2}h(t) + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{e^{+j(2t-3\pi/4)} + e^{-j(2t-3\pi/4)}}{2} = \\ &= 0.5h(t) + 0.707 \cos(2t - 3\pi/4) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Exemplo 3-7: a antitransformada contém um impulso de Dirac.

Seja a transformada da resposta de um sistema dada por

$$Y(s) = \frac{s+5}{s+1}. \quad (3.64)$$

Porque o grau do numerador é igual ao do denominador devemos formar a expansão como

$$Y(s) = A_0 + \frac{A_1}{s+1}. \quad (3.65)$$

A única função resíduo é

$$Y_1(s) = s+5. \quad (3.66)$$

Pelo que as constantes A_i têm os valores

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 \\ A_1 &= Y_1(-1) = -1 + 5 = 4 \end{aligned} \quad (3.67)$$

A antitransformada escrever-se-á

$$y(t) = \delta(t) + 4e^{-t}. \quad (3.68)$$

Caso 2: algumas das raízes de $D(s)$ são repetidas (múltiplas)

Um polinómio pode ter raízes múltiplas. Por exemplo:

$$s^3 + s^2 = s^2(s+1) \quad (3.69)$$

Assim, o polinómio $s^3 + s^2$ tem por raízes -1 , com multiplicidade 1, e 0, com multiplicidade 2. Se um polinómio com algumas raízes múltiplas⁸, for denominador de uma fracção racional em s , a expressão (3.48) não se pode aplicar. Vejamos como proceder.

A factorização do denominador de uma função da $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ em que $D(s)$ é um polinómio em que algumas raízes são múltiplas, dá como resultado:

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s-s_1)^{m(1)}(s-s_2)^{m(2)} \dots (s-s_K)^{m(K)}} \quad (3.70)$$

As K raízes s_i ($i=1,2,\dots,K$) têm multiplicidade $m(1), m(2), \dots, m(K)$. De notar que $m(1)+m(2)+\dots+m(K) = n$, em que n é o grau de $D(s)$.

Para simplificar, vamos supor que $n > m$. Então, a expansão de $F(s)$ em fracções parciais tem a forma geral:

$$F(s) = G_1(s) + G_2(s) + \dots + G_K(s).$$

Cada $G_i(s)$ é expandido em tantas fracções quantas a multiplicidade da raiz i :

$$G_i(s) = \frac{A_{i,1}}{(s-s_i)^{m(i)}} + \frac{A_{i,2}}{(s-s_i)^{m(i)-1}} + \dots + \frac{A_{i,m(i)}}{(s-s_i)}.$$

Como exemplo, suponhamos $F(s) = \frac{10}{s^2(s+1)}$. Então:

$$F(s) = \frac{A_{1,1}}{s^2} + \frac{A_{1,2}}{s} + \frac{A_{2,1}}{s+1} \quad (3.71)$$

As constantes $A_{i,1}$ calculam-se por

$$F_{i,1}(s) = (s-s_i)^{m(i)} F(s) \quad A_{i,1} = F_{i,1}(s_i). \quad (3.72)$$

⁸ De notar que este processo de cálculo só se aplica se $D(s)$ só se aplica, se $D(s)$ tiver mais do que 1 raiz múltipla. Se $D(s)$ tiver 1 só raiz múltipla, a antitransformada de $F(s)$ é dada pela Tabela 3-1.

Notemos que as expressões em (3.72) são para todos os efeitos equivalentes às expressões (3.49) e (3.50) se a multiplicidade de s_i for 1.

No exemplo, teríamos:

$$F_{1,1}(s) = s^2 \frac{10}{s^2(s+1)} = \frac{10}{s+1} \quad A_{1,1} = \frac{10}{0+1} = 10 \quad (3.73)$$

As constantes $A_{i,2}, \dots, A_{i,m(i)}$ calculam-se do seguinte modo:

$$\begin{aligned} F_{i,2}(s) &= \frac{F_{1,1}(s) - A_{i,1}}{s - s_i} & A_{i,2} &= F_{i,2}(s_i) \\ &\vdots & &\vdots \\ F_{i,j}(s) &= \frac{F_{1,j-1}(s) - A_{i,j-1}}{s - s_i} & A_{i,j} &= F_{i,j}(s_i) \end{aligned} \quad (3.74)$$

No exemplo, teríamos:

$$F_{1,2}(s) = \frac{\frac{10}{s+1} - 10}{s} = -\frac{10}{s+1} \quad A_{1,2} = -\frac{10}{0+1} = -10. \quad (3.75)$$

Tendo esgotado as parcelas referentes à raiz 0, calculamos a constante referente à raiz -1 :

$$F_{2,1}(s) = (s+1) \frac{10}{s^2(s+1)} = \frac{10}{s^2} \quad A_{2,1} = F_{2,1}(-1) = 10. \quad (3.76)$$

Pelo que a expansão ficará:

$$F(s) = \frac{10}{s^2} - \frac{10}{s} + \frac{10}{s+1}. \quad (3.77)$$

Sendo a sua antitransformada:

$$f(t) = 10t - 10h(t) + 10e^{-t} \quad (3.78)$$

Função de transferência

Tendo estabelecido como passar de uma função $f(t)$ no domínio do tempo para a sua correspondente no domínio s , estamos agora em condições de considerar o modelo no domínio s a que se chama *função de transferência*. Para tal necessitamos de relembrar a seguinte propriedade (teorema da derivação) das transformadas de Laplace.

Seja a função $f(t)$ com transformada de Laplace $F(s)$. A transformada da sua enésima derivada $f^{(n)}(t)$ é dada por:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (3.79)$$

Em particular:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)] &= sF(s) - f(0) \\ \mathcal{L}[f''(t)] &= s^2F(s) - sf(0) - f''(0)\end{aligned}\quad (3.80)$$

Esta propriedade permite-nos determinar a função de transferência correspondente à equação diferencial (3.1) que se rescreve por comodidade:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \quad (3.81)$$

Se determinarmos as transformada de Laplace de cada um dos membros desta equação, usando a propriedade em (3.79), *assumindo que todas as condições iniciais são nulas*, encontramos que:

$$\begin{aligned}s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) &= \\ &= b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)\end{aligned}\quad (3.82)$$

Pondo $Y(s)$ e $U(s)$ em evidência, vem:

$$Y(s) (s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) U(s). \quad (3.83)$$

Pelo que podemos exprimir $Y(s)$ como

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} U(s) \quad (3.84)$$

A expressão $\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$ é chamada a *função de transferência* do

modelo (3.81) ou a função de transferência correspondente ao modelo (3.81). As funções de transferência são usualmente denotadas como $H(s)$. Seja então

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (3.85)$$

Podemos escrever

$$Y(s) = H(s)U(s). \quad (3.86)$$

Esta equação diz-nos que, sendo as condições iniciais todas *nulas*, a transformada de $y(t)$ no modelo (3.81) é igual ao *produto* da transformada de $u(t)$, do mesmo modelo, pela função de transferência. Este resultado é de grande importância por várias razões.

Reparemos que, para definirmos $H(s)$, consideramos uma situação que corresponde ao problema da previsão da resposta forçada. Se tentarmos resolver este problema baseando-nos numa equação diferencial da forma (3.81), teremos que resolver a equação, sendo conhecida a evolução de $u(t)$, de forma a prevermos a evolução de $y(t)$. Mas com o modelo função de transferência, temos a seguinte alternativa.

Suponhamos que um modelo de um sistema nos é dado na forma de uma equação diferencial (3.81). Para prevermos a resposta do sistema $y(t)$ a uma entrada específica $u(t)$ (ou a qualquer entrada que tenha uma transformada de Laplace), procedemos da seguinte forma.

- i) Calculamos a função de transferência do modelo $H(s)$;
- ii) Calculamos a transformada de Laplace de $u(t)$: $U(s) = \mathcal{L}(u(t))$;
- iii) Calculamos $Y(s) = H(s) \cdot U(s)$;
- iv) Calculamos a antitransformada de Laplace de $y(t)$: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s))$.

Exemplo 3-8: respostas de um sistema térmico.

Suponha-se o sistema térmico no capítulo 2, Exemplo 2-10. Obtivemos a seguinte equação diferencial para o descrever:

$$\frac{d\Delta\theta}{dt} + \frac{1}{R_t C_t} \Delta\theta = \frac{1}{C_t} q_e \quad (3.87)$$

A sua função de transferência vem

$$\frac{\Delta\Theta(s)}{Q_e(s)} = \frac{1/C_t}{s + 1/(R_t C_t)} \quad (3.88)$$

Suponha-se que $R_t = 2$ ($^{\circ}\text{C}/\text{Kw}$) e $C_t = 125$ ($\text{Kw}\cdot\text{s}/^{\circ}\text{C}$). Então

$$\Delta\Theta(s) = \frac{0.008}{s + 0.004} Q_e(s) \quad (3.89)$$

Suponhamos também que queremos prever a evolução de $\Delta\theta(t)$, partindo de $\Delta\theta(0) = 0$, quando se liga a resistência de aquecimento de forma a debitar uma potência constante de 50 Kw. Então $u(t) = 50h(t)$, pelo que:

$$Q_e(s) = \frac{50}{s}. \quad (3.90)$$

A transformada da elevação da temperatura virá

$$\Delta\Theta(s) = \frac{0.008}{s + 0.004} \cdot \frac{50}{s} = \frac{0.4}{s(s + 0.004)}. \quad (3.91)$$

A previsão será então:

$$\begin{aligned} \Delta\theta(t) &= \mathcal{L}^{-1}(\Delta\Theta(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{0.4}{s(s + 0.004)}\right) = \\ &= \frac{100}{s} - \frac{100}{s + 0.004} = \\ &= 100h(t) - 100e^{-0.004t} = 100(h(t) - e^{-\frac{t}{250}}) \end{aligned} \quad (3.92)$$

Forma zero-polar de uma função de transferência

É possível representar uma função de transferência na forma zero-polar equivalente, isto é, com o numerador e o denominador factorizados nas suas m e n raízes, (confrontar com (3.47)):

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \\ &= K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad K = b_m \end{aligned} \quad (3.93)$$

Os valores z_1 a z_m são ditos os zeros da função de transferência. Os valores p_1 a p_n são ditos os pólos da função de transferência. A razão já foi explicada. Se p é um pólo de $H(s)$, então $|H(p)| = \infty$. Os zeros são os valores da função de transferência que a tornam nula. Se z é um zero da função de transferência $|H(z)| = 0$. Os pólos, os zeros e o valor de $K = b_m$ caracterizam completamente a função de transferência e o comportamento do modelo que ela descreve.

É útil representar graficamente os pólos e os zeros de uma função de transferência num diagrama no plano s . Um pólo representa-se por um sinal (\times) e um zero por um pequeno círculo (\circ). Estes diagramas chamam-se zero-polares. Note-se que funções de transferência que só difiram pelo valor de K não se podem distinguir nestes diagramas.

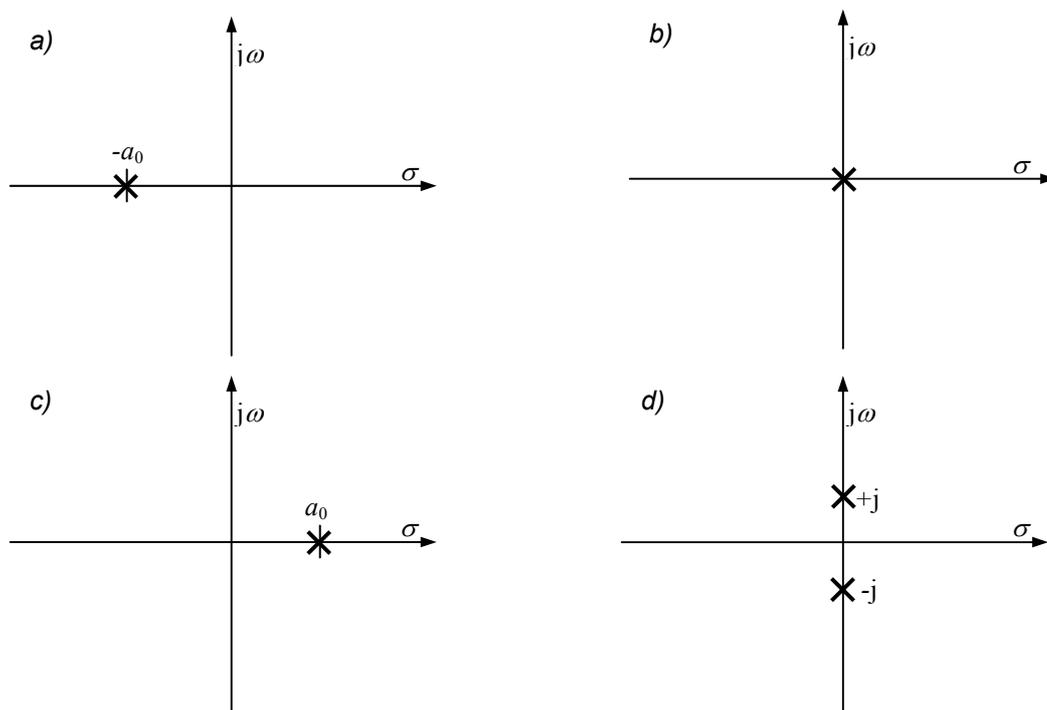


Figura 3–8 Diagramas zero-polares para: a) $H(s) = K/(s + a_0)$; b) $H(s) = K/s$; c) $H(s) = K/(s - a_0)$ d) $H(s) = K/(s^2 + 1)$.

3.3 Modelos LIT e análise da influência dos parâmetros

Na secção anterior, mostramos como os modelos no domínio s podem ser usados para resolver o problema da previsão da resposta forçada. Nesta secção vamos debruçar-nos sobre a informação que os valores dos parâmetros dos modelos nos podem dar sobre os comportamentos que eles descrevem.

Exemplo 3-9: resposta ao degrau de funções de transferência com um só pólo no semiplano esquerdo.

As funções de transferência correspondentes aos modelos dos Exemplos 2-6 (circuito RC passa-baixo), 2-7 (corpo movendo-se num meio com atrito), 2-8 (sistema hidráulico), 2-10 (sistema térmico), e do Exercício 2-15 (câmara) têm um só pólo no semiplano esquerdo do plano complexo s . O seu diagrama zero-polar é da Figura 3-8a). A sua função de transferência é genericamente:

$$H(s) = \frac{b_0}{s + a_0} \quad a_0 > 0; b_0 = K \quad (3.94)$$

Correspondendo à equação

$$y' + a_0 y = b_0 u . \quad (3.95)$$

A resposta a um degrau de amplitude u_0 é:

$$y(t) = u_0 \frac{b_0}{a_0} \left(1 - e^{-a_0 t} \right) \quad (3.96)$$

O valor final da resposta é $u_0 b_0 / a_0$ e a velocidade de aproximação para 0 da exponencial varia directamente com o valor de a_0 . Quanto mais elevado for o valor de a_0 mais rápida a aproximação e vice-versa.

Este parâmetro deve ter a dimensão de um inverso de um intervalo de tempo T :

$$a_0 = 1/T = T^{-1} \quad (3.97)$$

O significado físico de a_0 é o de uma frequência e o seu valor dado por (3.97) é o da *frequência angular*.

O intervalo T é chamado a constante de tempo do modelo

$$T = 1/a_0 \quad (3.98)$$

Usando T , (3.96) pode escrever-se

$$y(t) = u_0 b_0 T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (3.99)$$

O conhecimento das expressões T e de $b_0 T$ em função dos parâmetros concretos do modelo permite-nos prever como alterações nos valores destes se reflectirão na resposta ao degrau: velocidade de resposta e valor final. Para os exemplos acima referidos, as expressões são.

$$\begin{array}{ll} T = RC & b_0 T = 1 \\ T = M/B & b_0 T = 1/B \\ T = R_h^* A & b_0 T = R_h^* \\ T = R_t C_t & b_0 T = R_t \end{array}$$

Resposta ao impulso de Dirac

Embora o impulso de Dirac seja uma abstracção, apenas aproximável, de um sinal ou evolução temporal de uma variável com uma duração muito curta, é extremamente útil considerar a resposta de um modelo LIT à sua aplicação.

Seja um sistema tendo por modelo uma função de transferência $H(s)$. Aplicando na entrada um impulso de Dirac $\delta(t)$, que sinal $y_\delta(t)$ observaríamos na saída?

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\delta(t)) &= 1 \\ Y_\delta(s) &= H(s) \cdot 1 = H(s) \\ y_\delta(t) &= \mathcal{L}^{-1}(Y_\delta(s)) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)) = h(t)\end{aligned}\tag{3.100}$$

A resposta prevista pelo modelo será uma função $h(t)$ que é a antitransformada de $H(s)$. Esta função $h(t)$ ⁹, tal como a função de transferência, caracteriza o modelo. É chamada a *função de peso* do modelo. A razão é que qualquer saída $y_F(t)$ se pode calcular como a convolução de $h(t)$ pela entrada aplicada $u(t)$:

$$y_F(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(t - \tau) u(\tau) d\tau.\tag{3.101}$$

Em (3.101) o símbolo * significa a operação de convolução. A função $h(t)$ pode ver-se como pesando a contribuição de cada $u(\tau)$ no valor de $y_F(t)$. Uma das vantagens da utilização da transformada de Laplace consiste em permitir substituir o cálculo de um integral de convolução como o de (3.101) por operações algébricas envolvendo transformadas.

A forma de $h(t)$ é determinada pelo número e valor dos pólos de $H(s)$. Com efeito tem-se, para o caso dos pólos p_i de $H(s)$ serem todos distintos:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)) = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A_i}{s - p_i}\right).\tag{3.102}$$

Em (3.102) n é o número de pólos, p_i o valor de cada pólo e $A_i = H_i(p_i)$ o valor da função “resíduo” para $s = p_i$ (confrontar (3.48), (3.49), (3.50)). O facto de $h(t)$ ser uma soma em que cada parcela depende directamente de um pólo¹⁰ de uma forma precisa, permite prever a forma e propriedades da resposta, se forem conhecidos os pólos e os zeros da função de transferência. Vejamos alguns exemplos de funções de transferência sem zeros.

Exemplo 3-10: resposta ao Dirac de funções de transferência com um só pólo real.

O modelo abstracto (3.94), dos exemplos referidos, pode ser generalizado escrevendo $a_0 = -\sigma$ e não

⁹ Não confundir o símbolo genérico de uma função de peso $h(t)$, com o símbolo do degrau unitário $h(t)$.

¹⁰ É a antitransformada de uma expressão $A_i/(s - p_i)$, p_i sendo um pólo.

pondo restrições no valor do pólo:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s - \sigma} \quad (3.103)$$

As respostas ao Dirac $y_{\delta}(t)$ ou funções de peso $h(t)$ para $t > 0$ serão, conforme o sinal do pólo σ , com

$$T = |\sigma|^{-1} = \frac{1}{|\sigma|} :$$

$$\begin{aligned} \sigma < 0 &\rightarrow y_{\delta}(t) = h(t) = Ke^{-\frac{t}{T}} && \text{exponencial tendendo para 0 de valor inicial } K \\ \sigma = 0 &\rightarrow y_{\delta}(t) = h(t) = K && \text{constante de valor } K \\ \sigma > 0 &\rightarrow y_{\delta}(t) = h(t) = Ke^{\frac{t}{T}} && \text{exponencial tendendo para } \infty \text{ de valor inicial } K \end{aligned} \quad (3.104)$$

Exemplo 3-10: resposta ao Dirac de funções de transferência com um só par de pólos complexos conjugados.

A função de transferência a considerar tem apenas dois pólos complexos conjugados: $p = \sigma + j\omega$, $p^* = \sigma - j\omega$, $\omega > 0$.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{(s-p)(s-p^*)} = \frac{K}{(s-(\sigma+j\omega))(s-(\sigma-j\omega))} = \frac{K}{s^2 - 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2} \quad (3.105)$$

Se $\sigma = 0$, os pólos desta função de transferência situam-se no eixo imaginário em $\pm j\omega$:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^2 + \omega^2}. \quad (3.106)$$

A resposta ao Dirac $y_{\delta}(t)$ ou função de peso $h(t)$ é uma oscilação sinusoidal de frequência ω , fase inicial 0 e amplitude constante K/ω .

$$\begin{aligned} y_{\delta}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{K}{(s-j\omega)(s+j\omega)} \right) = \\ &= K \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{2j\omega} \frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{2j\omega} \frac{1}{s+j\omega} \right) = \\ &= \frac{K}{\omega} \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) = \\ &= \frac{K}{\omega} \text{sen}(\omega t). \end{aligned} \quad (3.107)$$

Como exemplo deste caso pode considerar-se a função de transferência correspondente ao modelo linear de um pêndulo em suspensão actuado no seu fulcro por um binário (confrontar com o Exemplo 2-13).

Se $\sigma \neq 0$ os pólos situam-se ou no semiplano esquerdo ou no semiplano direito do plano s .

$$\begin{aligned}
y_{\delta}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{K}{(s-(\sigma+j\omega))(s-(\sigma-j\omega))}\right) = \\
&= K\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2j\omega}\frac{1}{s-(\sigma+j\omega)} - \frac{1}{2j\omega}\frac{1}{s-(\sigma-j\omega)}\right) = \\
&= \frac{K}{\omega}\frac{1}{2j}\left(e^{(\sigma+j\omega)t} - e^{(\sigma-j\omega)t}\right) = \frac{K}{\omega}e^{\sigma t}\frac{1}{2j}\left(e^{+j\omega t} - e^{-j\omega t}\right) = \\
&= \frac{K}{\omega}e^{\sigma t}\text{sen}(\omega t).
\end{aligned} \tag{3.108}$$

A resposta ao Dirac $y_{\delta}(t)$ ou função de peso $h(t)$ é uma oscilação sinusoidal de frequência ω , fase inicial 0, com amplitude decrescente se $\sigma < 0$, ou amplitude crescente se $\sigma > 0$.

Como exemplo consideremos o modelo de sistema mecânico no Exemplo 2-14:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{B}{M}\frac{dx}{dt} + \frac{K_e}{M}x = \frac{1}{M}f \tag{3.109}$$

Tem-se que

$$\begin{aligned}
-2\sigma &= \frac{B}{M} \leftrightarrow \sigma = -\frac{B}{2M} \\
\sigma^2 + \omega^2 &= \frac{K_e}{M} \leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{K_e}{M} - \frac{B^2}{4M^2}} \\
K &= \frac{1}{M}
\end{aligned} \tag{3.110}$$

O sistema apresentará oscilações se $\omega > 0 \leftrightarrow K_e > \frac{B^2}{4M}$. A amplitude destas oscilações será sempre decrescente se $B > 0$, a sua taxa de decrescimento variando directamente com B e inversamente com M . No caso ideal $B = 0$, os pólos situam-se no eixo imaginário e a respostas será dada por (3.107).

Resposta ao Dirac como uma soma de modos

Os exemplos anteriores ajudarão a compreender o seguinte. *Qualquer* resposta ao impulso de Dirac de uma função de transferência $H(s)$ da forma (3.93) com $n > m$, e *qualquer* função de peso correspondente $h(t)$ é uma soma de funções que chamamos *modos lineares*. Se os pólos p_i de $H(s)$ forem todos diferentes, então a forma geral de (3.102) é uma soma de *modos lineares exponenciais*:

$$h(t) = \sum_{i=1}^n h_i(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t}. \tag{3.111}$$

Se $p_i \in \mathbb{R} \leftrightarrow p_i = \sigma_i$, a constante A_i é real e o modo $h_i(t) = A_i e^{\sigma_i t}$ é uma exponencial real que tende para 0, para A_i ou para ∞ dependendo do sinal de σ_i :

$$\begin{aligned}
\sigma_i < 0 &\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} h_i(t) = 0 \\
\sigma_i = 0 &\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} h_i(t) = A_i \\
\sigma_i > 0 &\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} h_i(t) = \infty
\end{aligned} \tag{3.112}$$

Neste caso, dizemos que o modo é *real e não-oscilatório*.

Se $p_i \in \mathbb{C} \leftrightarrow p_i = \sigma_i + j\omega_i$, o coeficiente A_i pode ser complexo, $A_i = |A_i|e^{j\phi_i}$ e o modo $h_i(t) = A_i e^{p_i t} = A_i e^{(\sigma_i + j\omega_i)t} = A_i e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t}$ é uma exponencial complexa. Dizemos que o modo é *complexo*.

O seu módulo é

$$|h_i(t)| = |A_i| |e^{\sigma_i t}| |e^{j\omega_i t}| = |A_i| e^{\sigma_i t} \cdot 1 = |A_i| e^{\sigma_i t}. \quad (3.113)$$

Similarmente ao caso anterior, o comportamento de $|h_i(t)|$ quando $t \rightarrow \infty$, é uma função do sinal de σ_i .

$$\begin{aligned} \sigma_i < 0 &\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |h_i(t)| = 0 \\ \sigma_i = 0 &\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |h_i(t)| = |A_i| \\ \sigma_i > 0 &\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |h_i(t)| = \infty \end{aligned}$$

Num modelo LIT de coeficientes reais, um pólo $p_i \in \mathbb{C} \leftrightarrow p_i = \sigma_i + j\omega_i$ aparecerá sempre acompanhado do seu conjugado

$$\exists p_i \in \mathbb{C} \leftrightarrow p_i = \sigma_i + j\omega_i \leftrightarrow \exists p_j = p_i^* = \sigma_i - j\omega_i \quad (3.114)$$

A função de peso conterà dois modos complexos conjugados com coeficientes também conjugados:

$$\begin{aligned} h_i(t) + h_i^*(t) &= |A_i| e^{j\phi_i} e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t} + |A_i| e^{-j\phi_i} e^{\sigma_i t} e^{-j\omega_i t} = \\ &= |A_i| e^{\sigma_i t} (e^{j\omega_i t} e^{j\phi_i} + e^{-j\omega_i t} e^{-j\phi_i}) = \\ &= |A_i| e^{\sigma_i t} (e^{j(\omega_i t + \phi_i)} + e^{-j(\omega_i t + \phi_i)}) = \\ &= 2|A_i| e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i) = \\ &= 2|A_i| e^{\sigma_i t} \sin(\omega_i t + \phi_i - \pi/2) \end{aligned} \quad (3.115)$$

A soma $h_{ii^*}(t) = h_i(t) + h_i^*(t)$ de dois modos complexos conjugados é uma função sinusoidal do tempo de amplitude $2|A_i|e^{\sigma_i t}$ frequência angular ω_i e fase inicial ϕ_i , ou fase inicial $\phi_i - \pi/2$, conforme se exprima a função em co-seno ou em seno. Dizemos que a soma dos modos complexos é um *modo real oscilatório*.

Diferentemente do caso anterior, o comportamento de $h_{ii^*}(t)$ ou de $|h_{ii^*}(t)|$, quando $t \rightarrow \infty$, não é monótono, mas sim oscilatório, devido à função sinusoidal. É então útil exprimir este comportamento em termos de intervalos de valores, em que os valores da função $h_{ii^*}(t)$ ou do seu módulo $|h_{ii^*}(t)|$ pode podem ficar confinados em função do sinal de σ_i :

$$\sigma_i < 0 \rightarrow \forall M > 0, \exists t, \forall \tau > 0, |h_{ii^*}(t + \tau)| < M \quad (3.116)$$

$$\sigma_i = 0 \rightarrow \exists M > 0, \forall t, |h_{ii^*}(t)| \leq M \quad (3.117)$$

$$\sigma_i > 0 \rightarrow \neg \exists M > 0, \forall t, |h_{ii^*}(t)| \leq M \tag{3.118}$$

A primeira equação diz que se $\sigma_i < 0$, então, por pequeno que seja o valor constante M escolhido, existirá um instante de tempo t , a partir do qual, todos os valores de $|h_{ii^*}(t + \tau)|, \tau > 0$ lhe serão inferiores. Significa isto, claro, que $\sigma_i < 0 \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |h_{ii^*}(t)| = 0$. A segunda equação diz que, se $\sigma_i = 0$, os valores de $h_{ii^*}(t + \tau)$ estarão confinados num intervalo $[-M, +M]$. A terceira que, se $\sigma_i > 0$, tal intervalo não existe.

Pode ver-se que as implicações em (3.116), (3.117) e (3.118) também são verdadeiras para os modos reais exponenciais.

Esta análise permite-nos enunciar o seguinte resultado de grande interesse prático. Na resposta ao Dirac ou na função de peso $h(t)$ de uma função de transferência $H(s)$ da forma (3.93) com $n > m$ e *todos os pólos distintos*, podemos encontrar 6 (e apenas 6!) tipos de parcelas reais ou de modos reais. Pondo mais uma vez $T = |\sigma|^{-1}$:

	Módulo tem limite 0	Módulo é limitado	Módulo é ilimitado
Não-oscilatórios	$Ae^{-\frac{t}{T}}$	A	$Ae^{+\frac{t}{T}}$
Oscilatórios	$Ae^{-\frac{t}{T}} \cos(\omega t + \phi)$	$A \cos(\omega t + \phi)$	$Ae^{+\frac{t}{T}} \cos(\omega t + \phi)$

Se os pólos não forem todos distintos, isto é se alguns pólos forem múltiplos, a expressão de $H(s)$ vem:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \\
 &= b_m \frac{(s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_j) \dots (s - p_i)^{K(i)} \dots}
 \end{aligned}
 \tag{3.119}$$

$H(s)$ tem J pólos simples ou de multiplicidade 1 e tem pelo menos um pólo p_i de multiplicidade $K(i) = 2, 3, \dots$,

Na expressão do somatório de $H(s)$ em fracções parciais existirá alguma ou algumas fracções parciais da forma:

$$H_{i,k}(s) = \frac{A_{i,k}}{(s - p_i)^k} \tag{3.120}$$

Em que $k = 2, 3, \dots, K(i)$. A resposta ao Dirac ou o modo que corresponde à expressão (3.120) é

$$y_\delta(t) = h_{i,k}(t) = \frac{A_{i,k}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_i t} = \frac{A_{i,k}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\sigma_i t} e^{j\omega_i t} \tag{3.121}$$

Chamaremos a modos com esta forma modos *ressonantes*. Tal como no caso dos pólos simples, se $p_i \in \mathbb{C}$, existirá um modo que lhe é conjugado. Uma análise semelhante à anterior

levar-nos-ia á conclusão de que podemos definir também 6 tipos de modos reais ressonantes, um para cada um dos modos no quadro anterior:

	Módulo tem limite 0	Módulo é ilimitado	Módulo é ilimitado
Não-oscilatórios	$At^k e^{-\frac{t}{T}}$	At^k	$At^k e^{+\frac{t}{T}}$
Oscilatórios	$At^k e^{-\frac{t}{T}} \cos(\omega t + \phi)$	$At^k \cos(\omega t + \phi)$	$At^k e^{+\frac{t}{T}} \cos(\omega t + \phi)$

Uma importante diferença aparece na coluna do meio: o módulo dos modos correspondentes a pólos múltiplos situados no eixo imaginário, $\text{Re}(p_i) = \sigma_i = 0$, cresce sem limite quando $t \rightarrow \infty$:

$$\sigma_i = 0 \rightarrow \neg \exists M > 0, \forall t, |h_{i,k}(t)| \leq M \quad (3.122)$$

Nos outros dois casos, $\sigma_i < 0 \vee \sigma_i > 0$, o comportamento é igual ao dos pólos simples.

Estabilidade de modelos LIT

Seja a resposta ao Dirac $h(t)$ de uma função de transferência $H(s)$. Dizemos que é *instável* se

$$\neg \exists M > 0, \forall t, |h(t)| \leq M. \quad (3.123)$$

Uma $h(t)$ – ou $H(s)$ – será *estável* se não for instável. Ou seja, se:

$$\exists M > 0, \forall t, |h(t)| \leq M. \quad (3.124)$$

Podemos distinguir duas classes de estabilidade. Um modelo *estritamente estável* satisfaz (3.124) e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |h(t)| = 0. \quad (3.125)$$

Um modelo marginalmente estável satisfaz (3.124), mas não (3.125).

Critério fundamental de estabilidade

Visto que a resposta ao Dirac de uma função de transferência $H(s)$:

- i) é um somatório de modos;
- ii) para cada tipo de modos conhecemos a sua estabilidade como uma função da parte real $\text{Re}(p_i) = \sigma_i$ e da multiplicidade $K(p_i)$ do pólo, ou pólos, que lhe dão origem.

Podemos classificar a estabilidade de um modelo linear na forma de $H(s)$, pela análise da posição dos pólos no plano s e da sua multiplicidade.

A condição equivalente a instabilidade é

$$\exists p_i, \operatorname{Re}(p_i) > 0 \vee \exists p_i, \operatorname{Re}(p_i) = 0 \wedge K(p_i) > 1. \quad (3.126)$$

Ou seja existe pelo menos um pólo no semiplano direito ou um pólo de multiplicidade maior que 1 no eixo imaginário.

A condição equivalente a estabilidade estrita é

$$\forall p_i, \operatorname{Re}(p_i) < 0. \quad (3.127)$$

Ou seja, todos os pólos estão no semiplano esquerdo.

Um modelo é marginalmente estável se só tiver pólos de multiplicidade 1 no eixo imaginário e não tiver pólos no semiplano direito.

Regime transitório e regime permanente da resposta forçada

Suponhamos que aplicamos a um modelo de função de transferência $H(s)$, estritamente estável, com n_H pólos, $p_{1H} \dots p_{nH}$, e m_H zeros, $z_{1H} \dots z_{mH}$, uma entrada arbitrária $U(s)$ definida por uma fracção de polinómios em s com n_U pólos, $p_{1U} \dots p_{nU}$, e m_U zeros, $z_{1U} \dots z_{mU}$. A transformada da saída vem:

$$\begin{aligned} Y(s) &= H(s)U(s) = \\ &= K_H \frac{(s - z_{1H}) \dots (s - z_{mH})}{(s - p_{1H}) \dots (s - p_{nH})} K_U \frac{(s - z_{1U}) \dots (s - z_{mU})}{(s - p_{1U}) \dots (s - p_{nU})} \end{aligned} \quad (3.128)$$

A saída $y(t)$ vai ser o somatório de dois tipos de modos. Os *modos próprios* de H e os *modos provocados* por U :

$$y(t) = \sum h_{iH}(t) + \sum h_{iU}(t) \quad (3.129)$$

Se H é estritamente estável todos os seus modos tendem para 0. É possível encontrar um tempo de observação t_o a partir do qual a contribuição do primeiro somatório possa ser considerada 0. Então

$$t \geq t_o \rightarrow y(t) = \sum h_{iU}(t) \quad (3.130)$$

Ou seja, apenas os modos provocados pela entrada estão presentes na saída. Chamamos ao intervalo $[0, t_o[$ o *regime transitório* e ao intervalo $[t_o, \infty[$ o *regime permanente* da resposta $y(t)$.

Ganho ao degrau unitário em regime permanente

Suponhamos que aplicamos a um modelo de função de transferência $H(s)$, estritamente estável, um impulso em degrau unitário. Pode ver-se que a resposta $y(t)$ tende para um valor constante.

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= H(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{H(s)}{s} = \\
 &= \frac{A_0}{s} + H'(s) = \frac{|H(0)|}{s} + H'(s)
 \end{aligned} \tag{3.131}$$

O facto de $H(s)$ ser estritamente estável faz com que $H'(s)$ o seja. Então no regime permanente, a propriedade (3.130) é satisfeita e:

$$t > t_o \rightarrow y(t) = |H(0)| \tag{3.132}$$

$|H(0)|$ é chamado o *ganho ao degrau em regime permanente* e é também simbolizado como K_{rp} .

Ganho à sinusóide em regime permanente

O conhecimento da resposta forçada de um modelo LIT $H(s)$, estritamente estável, a uma sinusóide é de importância fulcral em diversas áreas da Engenharia. Suponha-se que a sinusóide de teste é dada pela função $u(t) = \text{sen}(\omega t)$. Tem-se que

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= H(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = H(s) \frac{\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)} = \\
 &= \frac{A}{s - j\omega} - \frac{A^*}{s + j\omega} + H'(s) = \\
 &= \frac{H(j\omega)/2j}{s - j\omega} - \frac{H(-j\omega)/2j}{s + j\omega} + H'(s)
 \end{aligned} \tag{3.133}$$

De novo, o facto de $H(s)$ ser estritamente estável faz com que $H'(s)$ o seja. Então no regime permanente, a propriedade (3.130) é satisfeita. Usando o facto de que $H(j\omega)$ e $H(-j\omega)$ são números complexos conjugados com módulo K e argumentos $\pm\phi$:

$$\begin{aligned}
 K &= |H(j\omega)| = |H(-j\omega)| \\
 \phi &= \arg H(j\omega) = -\arg H(-j\omega)
 \end{aligned} \tag{3.134}$$

Podemos verificar que no regime permanente

$$\begin{aligned}
 t > t_o &\rightarrow \\
 y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{2j} \frac{H(j\omega)}{s - j\omega} - \frac{1}{2j} \frac{H(-j\omega)}{s + j\omega} \right) = \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{2j} \frac{K e^{j\phi}}{s - j\omega} - \frac{1}{2j} \frac{K e^{-j\phi}}{s + j\omega} \right) \\
 &= K \frac{1}{2j} \left(e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)} \right) = \\
 &= K \text{sen}(\omega t + \phi).
 \end{aligned} \tag{3.135}$$

A saída é portanto uma sinusóide com amplitude K e desfasamento ϕ . O ganho em regime permanente para uma sinusóide é um número complexo, cujo módulo é o ganho em amplitude K e o argumento é a fase para o instante 0. Este número complexo – $H(j\omega)$ – é função de ω . Será diferente para diferentes valores de ω .

3.4 Modelos LIT de uso comum

Dois modelos LIT têm importância especial, dada a elevada frequência com que são encontrados em aplicações práticas. São eles o integrador realimentado e o oscilador amortecido. São ambos estáveis, o primeiro tendo um pólo (é de primeira ordem) e o segundo tendo 2 pólos (é de segunda ordem). Dada a sua importância, vamos fazer um estudo mais detalhado deles.

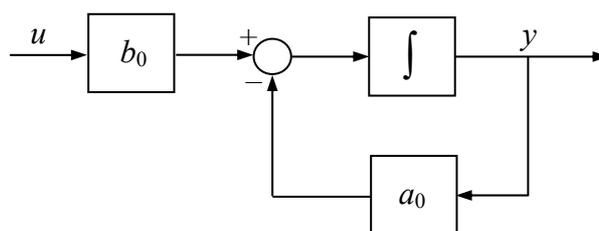
Integrador realimentado

A equação diferencial geral deste modelo já foi encontrada nos Exemplos 2-6, 2-7, 2-9, 2-10, 2-12 (caso da saída ser a velocidade) e nos Exercícios 2-13 e 2-15. Escreve-se:

$$\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u. \quad (3.136)$$

Sendo que $a_0 > 0$.

O seu diagrama de blocos repete-se a seguir.



Nota-se que a saída y depende dela própria. Por isso se diz integrador realimentado. Observe-se que se a entrada u for constante, y tenderá para um valor constante. Este valor é tal que iguala o valor de $(b_0/a_0)u$. Nesta condição, a entrada do integrador é 0 e y é constante.

Vamos determinar a sua *resposta total*. Num modelo linear a resposta total é a soma da *resposta livre* com a *resposta forçada*. Para determinarmos a resposta forçada consideramos todas as condições iniciais nulas, mas para determinarmos a resposta total devemos abandonar esta restrição. Assumimos assim que $y(0) \neq 0$. Usando o teorema da derivação das transformadas de Laplace, a equação (3.136) pode reescrever-se sucessivamente como:

$$\begin{aligned} sY(s) - y(0) + a_0Y(s) &= b_0U(s) \\ (s + a_0)Y(s) &= y(0) + b_0U(s) \end{aligned} \quad (3.137)$$

Donde retiramos

$$Y(s) = \frac{1}{s + a_0} y(0) + \frac{b_0}{s + a_0} U(s). \quad (3.138)$$

Calculando a antitransformada de $Y(s)$ obtemos $y(t)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = y(0)e^{-a_0t} + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{b_0}{s + a_0} U(s)\right). \quad (3.139)$$

Esta equação diz que a resposta total $y(t)$, do modelo (3.136) com condição inicial $y(0)$, a um sinal de entrada $u(t)$, é a soma de duas componentes.

Resposta livre

A resposta livre é a componente:

$$y_L(t) = y(0)e^{-a_0t}. \quad (3.140)$$

O termo resposta livre compreende-se, se observarmos que para $u(t) = 0$ e $y(0) \neq 0$, a resposta do modelo $y(t) = y_L(t)$ é diferente de 0. Nestas condições, o modelo descreve um comportamento do sistema em que a variável y evolui no tempo sem que a variável u a influencie. Observe-se também que a resposta livre deste modelo não depende de u .

Nas condições consideradas ($a > 0$), a resposta livre descrita por(3.140) é uma exponencial decrescente em módulo, com valor inicial $y(0)$. A taxa de decaimento para 0 do módulo da exponencial, depende do valor de a_0 . Como já se referiu, esta grandeza deve ter as dimensões do inverso de um tempo, para que o membro esquerdo de (3.136) seja dimensionalmente homogéneo. Define-se $T = 1/a_0$ como a *constante de tempo* do modelo (ou do sistema que ele descreve). Rescreve-se (3.140) como

$$y_L(t) = y(0)e^{-\frac{t}{T}}. \quad (3.141)$$

A taxa de decaimento da exponencial variará inversamente com o valor de T . Este valor tem a propriedade de se situar na intersecção, da recta tangente na origem à curva que representa $y_L(t)$, com o eixo dos tempos. Veja-se a Figura 3-3.

É de interesse conhecer os diferentes valores da resposta livre unitária, $y(0) = 1$, em função dos instantes de tempo discreto $t_k = kT$:

$$y_L(t_k) = y_L(kT) = y(0)e^{-\frac{kT}{T}} = y(0)e^{-k} = e^{-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.142)$$

Os valores desta sequência apresentam-se na tabela seguinte, modificando uma outra semelhante no Capítulo 1, calculados com duas decimais significativas.

Tabela 3-2 Valores da resposta livre normalizada do integrador realimentado.

kT	0	$1T$	$2T$	$3T$	$4T$	$5T$	$6T$	$7T$	$8T$
$y_L(kT)$	1,00	0,37	0,14	0,05	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00

Qualquer resposta livre, que se possa escrever na forma (3.140) ou forma (3.141), apresenta esta sequência de valores de *fracções* do valor inicial $y(0)$ nos instantes múltiplos da constante de tempo kT :

$$\frac{y_L(kT)}{y(0)} = \frac{y(0)e^{-\frac{kT}{T}}}{y(0)} = e^{-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.143)$$

Veja-se a Figura 3-3.

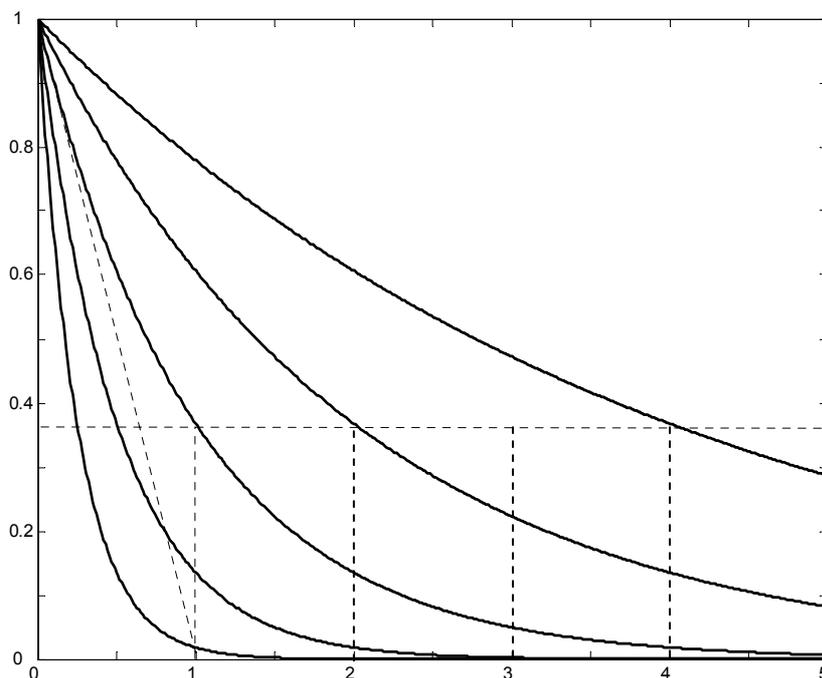


Figura 3-3 Funções exponenciais decrescentes do tempo em função do parâmetro T , para condição inicial 1.

Note-se que qualquer resposta livre tem um valor inferior a 5% do valor inicial, após $3T$, a 2% após $4T$ e a 1% após $5T$. Esta forma de ver a resposta livre é muito útil, por exemplo, na análise de sistemas digitais, como se verá no seguimento.

Resposta forçada

A resposta forçada é a componente:

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{b_0}{s + a_0} U(s) \right). \quad (3.144)$$

Observamos que se $u(t) \neq 0$ e $y(0) = 0$, a resposta do modelo $y(t) = y_F(t)$ é diferente de 0 devido à influência exercida na variável y pela variável u . Esta observação permite compreender porque se chama “resposta forçada” a esta componente da resposta.

A *função de transferência* do modelo (ou do sistema que ele descreve) é :

$$H(s) = \frac{b_0}{s + a_0}. \quad (3.145)$$

O ganho em regime permanente desta função de transferência é $K_{rp} = |H(0)| = b_0 / a_0$. Usando este parâmetro, (3.145) pode escrever-se convenientemente como:

$$H(s) = \frac{K_{rp}}{Ts + 1}. \quad (3.146)$$

Esta forma de escrever tem a vantagem de explicitar os valores de K_{rp} e de T .

A resposta forçada à entrada em impulso de Dirac é:

$$\begin{aligned} u(t) &= \delta(t) \rightarrow \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{K_{rp}}{Ts + 1} \right) = \frac{K_{rp}}{T} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s + a_0} \right) = \frac{K_{rp}}{T} e^{-t/T}. \end{aligned} \quad (3.147)$$

Observe-se que a resposta ao Dirac é idêntica à resposta livre se $y(0) = K_{rp} / T$.

A resposta forçada à entrada em degrau de amplitude u_0 é:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 h(t) \rightarrow \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{K_{rp}}{Ts + 1} \cdot \frac{u_0}{s} \right) = \\ &= K_{rp} u_0 \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + a_0} \right) = \\ &= K_{rp} u_0 (h(t) - e^{-t/T}) = K_{rp} u_0 (1 - e^{-t/T}) \end{aligned} \quad (3.148)$$

Pondo $y_{rp} = K_{rp} u_0$, observa-se que a resposta ao degrau vem:

$$\frac{y(t)}{y_{rp}} = 1 - e^{-\frac{t}{T}}. \quad (3.149)$$

É também útil conhecer os valores desta função para $t = kT$. Na Tabela 3-3 são apresentados os seus valores calculados a 2 decimais com k variando de 0 a 7.

Tabela 3-3 Valores da resposta forçada normalizada do integrador realimentado.

kT	0	$1T$	$2T$	$3T$	$4T$	$5T$	$6T$	$7T$	$8T$
$y(kT)/y_{rp}$	0,00	0,63	0,86	0,95	0,98	0,99	1,00	1,00	1,00

Note-se que o valor de qualquer resposta forçada a um degrau está a menos de 5% do valor final, após $3T$, a menos de 2% após $4T$ e a menos de 1% após $5T$. Esta forma de ver a resposta forçada é muito útil, por exemplo, na análise de sistemas digitais, como se verá no seguimento.

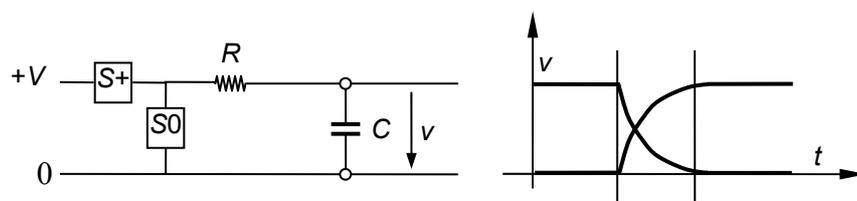
A resposta forçada à entrada em rampa de declive v_0 é:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= v_0 v(t) \rightarrow \mathcal{L}[v_0 v(t)] = \frac{v_0}{s^2} \rightarrow \\
 y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{K_{rp}}{Ts+1} \cdot \frac{v_0}{s^2} \right) = \\
 &= K_{rp} v_0 \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s+a_0} \right) = . \quad (3.150) \\
 &= K_{rp} v_0 \left(v(t) - T h(t) + T e^{-\frac{t}{T}} \right) \\
 &= K_{rp} v_0 \left(t + T(e^{-\frac{t}{T}} - 1) \right)
 \end{aligned}$$

Na interpretação das últimas expressões em cada resposta, devemos recordar que $y(t) = 0$ para $t < 0$.

Exemplo 3-10: constante de tempo da saída de um comutador electrónico.

Muitos dispositivos electrónicos apresentam resistência R e capacidade C de saída. No caso do dispositivo ser um comutador, como uma porta lógica, que faz a tensão de saída v transitar entre 0 e um valor positivo $+V$ e vice-versa, a situação pode ser representada pelo esquema seguinte, em que se indica também as



evoluções possíveis da tensão v .

Suponha-se que os 2 interruptores $S+$ e $S0$ ligam e desligam sincronizadamente, de forma que em nenhum instante de tempo estão ambos ligados ou desligados. Então, para v passar de 0 a $+V$ liga-se $S+$ e desliga-se $S0$. Isto significa que se aplicou um degrau de tensão ao circuito RC na figura. Quanto tempo se deve esperar para que v atinja o valor $+V$? Este é o chamado tempo de subida t_r da saída em vazio. Consoante a

aproximação desejada (5%, 2% ou 1%) pode ser tomado como $3T$, $4T$ ou $5T$.

Para v passar de $+V$ a 0, liga-se S_0 e desliga-se S_+ . Isto significa que o circuito RC na figura ficou em resposta livre. Quanto tempo se deve esperar para que v atinja o valor 0? Este é o chamado tempo de descida t_f da saída em vazio. Consoante a aproximação desejada (5%, 2% ou 1%) pode ser tomado como $3T$, $4T$ ou $5T$.

Modelo com tempo de atraso

Em muitas situações, por exemplo no caso do Exemplo 2-9, o modelo a considerar tem um tempo de atraso puro:

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t - T_a). \quad (3.151)$$

Esta equação pode ser reescrita como:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K_{rp} u(t - T_a). \quad (3.152)$$

Então:

$$TsY(s) + Y(s) = K_{rp} U(s) e^{-sT_a}. \quad (3.153)$$

A sua função de transferência é:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_{rp}}{Ts + 1} e^{-sT_a}. \quad (3.154)$$

A resposta deste modelo ao degrau de amplitude u_0 será:

$$y(t) = K_{rp} \left(h(t - T_a) - e^{-(t - T_a)/T} \right). \quad (3.155)$$

O oscilador subamortecido

O oscilador amortecido é um caso particular do modelo de segunda ordem:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b_0 u. \quad (3.156)$$

Para que (3.156) represente um oscilador amortecido, devem verificar-se as seguintes condições nos parâmetros: $a_0 > 0$ e $a_1 > 0$, satisfazendo a condição $a_1 < 2\sqrt{a_0}$ ou, o que é equivalente, $a_1 < 2a_0$.

Podemos escrever (3.156) de uma forma mais cómoda e compreensível, introduzindo, primeiro, a quantidade ω_n , dita a *frequência natural de oscilação* do sistema:

$$\omega_n = \sqrt{a_0}. \quad (3.157)$$

Em segundo, a quantidade ζ , dita o *coeficiente de amortecimento* do modelo ou do sistema:

$$\zeta = \frac{a_1}{2\omega_n}. \quad (3.158)$$

E em terceiro, a quantidade, K_{rp} , ganho em regime permanente. Ela é dada por:

$$K_{rp} = \frac{b_0}{a_0}. \quad (3.159)$$

Vamos ver que o valor destes parâmetros, permite caracterizar o comportamento do sistema descrito pelo modelo. Com estes parâmetros podemos rescrever (3.156) como:

$$y'' + 2\zeta\omega_n y' + \omega_n^2 y = K_{rp}\omega_n^2 u \quad (3.160)$$

Se calcularmos a função de transferência correspondente, obtemos:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_{rp}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad 0 < \zeta < 1. \quad (3.161)$$

Em (3.160) ou (3.161), desde que $\omega_n^2 > 0$, o modelo pode apresentar diferentes tipos de amortecimento, consoante o valor de ζ . Convém conhecer as seguintes designações:

- i) Se $\zeta = 0$, o modelo é dito *não-amortecido*;
- ii) Se, o modelo é dito *subamortecido*;
- iii) Se $\zeta = 1$, o modelo é dito *criticamente amortecido*;
- iv) Se $\zeta > 1$, o modelo é dito *sobre-amortecido*.

No caso que estamos a estudar, $0 < \zeta < 1$, os pólos da função de transferência são dados por:

$$s_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{(2\zeta\omega_n)^2 - 4\omega_n^2}}{2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (3.162)$$

Porque neste modelo se tem $0 < \zeta < 1$, os pólos são complexos conjugados:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (3.163)$$

Veja-se a Figura 3-4. A quantidade $\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ simboliza-se por ω_a e chama-se *frequência amortecida de oscilação*. A razão é a de ser este o valor de frequência angular dos fenómenos oscilatórios descritos pelo modelo.

Observe-se que ω_n pode ser visto como um factor de escala:

$$s_{1,2} = \omega_n \left(-\zeta \pm j\sqrt{1 - \zeta^2} \right). \quad (3.164)$$

Observe-se também que as componentes, reais e imaginárias, dos pólos satisfazem uma igualdade trigonométrica:

$$\left[\text{Re}(s_{1,2}) \right]^2 + \left[\text{Im}(s_{1,2}) \right]^2 = \omega_n^2 (\zeta^2 + 1 - \zeta^2) = \omega_n^2 \cdot 1 = \omega_n^2 \quad (3.165)$$

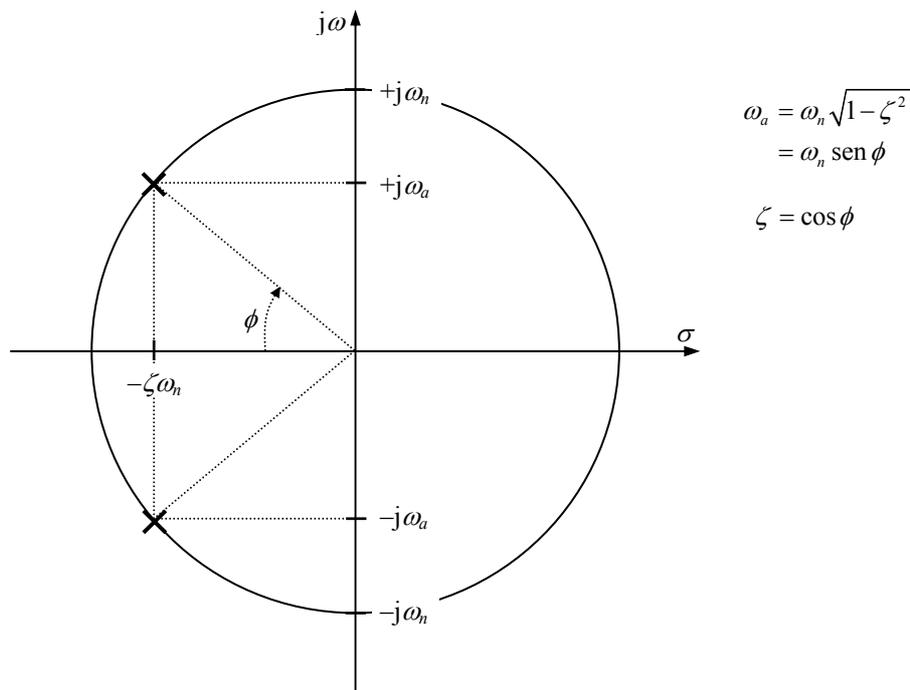


Figura 3-4 Diagrama zero-polar do oscilador amortecido. Observe-se que ζ e ω_a podem ser expressos em função do ângulo ϕ .

Isto significa que se ζ variar no intervalo $]0,1[$, mantendo-se ω_n constante, os pólos descrevem uma semicircunferência centrada na origem do plano s e tendo por raio ω_n .

Resposta livre

Vamos agora estudar a resposta livre de (3.160) para $y'(0) = 0$. A dedução de $y_L(t)$ é algo fastidiosa, de forma que apresentamos apenas o resultado:

$$y_L(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{y(0)(s + 2\zeta\omega_n)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right) = y(0) \frac{1}{\sin\phi} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_a t + \phi). \quad (3.166)$$

Em (3.166) é $\phi = \cos^{-1} \zeta$ e $\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$. A Figura 3-5 apresenta um exemplo. Vemos que a frequência de oscilação ω_a será sempre inferior à frequência natural de oscilação ω_n . Tem-se também que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_L(t) = 0.$$

Portanto, o modelo é estritamente estável.

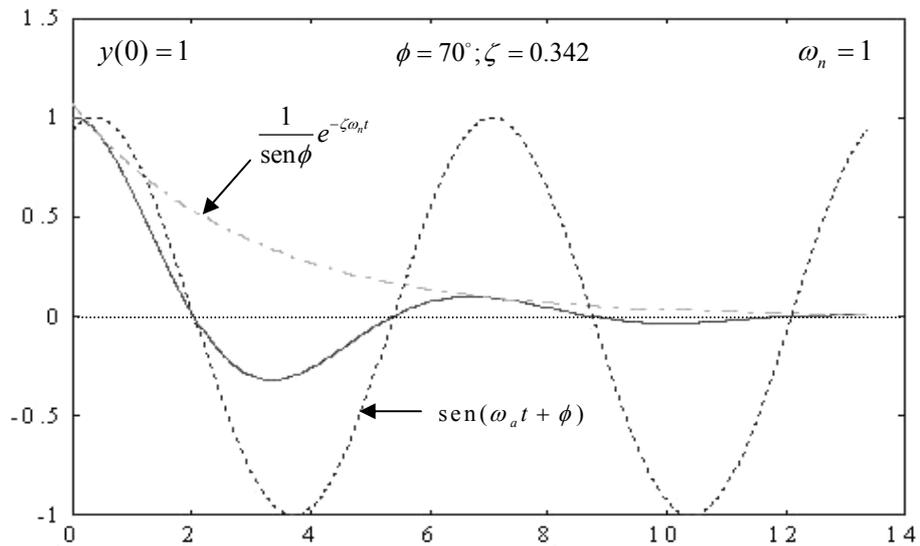


Figura 3-5 Exemplo de resposta livre de um oscilador amortecido. A resposta livre, a traço contínuo, é o produto das duas funções do tempo representadas a tracejado. Observe-se que a amplitude das oscilações decai exponencialmente com uma constante de tempo igual a $1/(\zeta\omega_n)$. O valor de ω_a é neste caso de aproximadamente 0.94 rad/s.

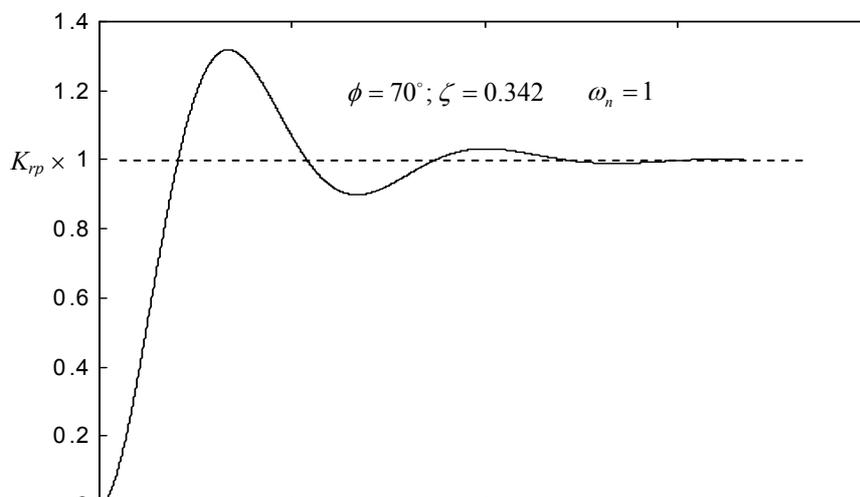


Figura 3-6 Exemplo de resposta forçada ao degrau unitário de um oscilador amortecido.

Resposta forçada ao degrau unitário

A resposta forçada ao degrau do oscilador amortecido tem grande importância prática. Omitindo, como fizemos para a resposta livre, os detalhes da dedução da sua expressão, ela escreve-se:

$$y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{K_{rp} \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s}\right) = K_{rp} \left(1 - \frac{1}{\text{sen } \phi} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_a t + \phi)\right) \quad (3.167)$$

Sendo $\phi = \cos^{-1} \zeta$ e $\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$, como em (3.166).

A Figura 3-6 mostra a resposta ao degrau unitário do modelo exemplificado na Figura 3-5. Tem-se que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_F(t) = K_{rp}.$$

O que está de acordo com o significado que atribuímos ao parâmetro K_{rp} em (3.159).

Muitos sistemas – não necessariamente descritos por (3.160) – apresentam respostas ao degrau unitário semelhantes na sua forma à representada na Figura 3-6. É usual caracterizar as respostas com esta forma pelo seguinte conjunto de parâmetros (examine-se a Figura 3-7 para referência):

Tempo de pico (t_p): é o tempo necessário para a resposta atingir o seu valor máximo.

Valor de pico (y_p): é o valor máximo da resposta.

Sobre-elevação (M_p): é a razão entre os valores de pico e em regime permanente da resposta. $M_p = y_p / y_{rp}$.

Sobre-elevação percentual (PO): esta quantidade é designada por ‘percent overshoot’ na literatura inglesa. Define-se por $PO = \frac{y_p - y_{rp}}{y_{rp}} \times 100\%$.

Tempo de estabelecimento (t_s): é o tempo necessário para a resposta ficar contida num intervalo à volta do valor em regime permanente. Este intervalo é usualmente especificado como $\pm 5\%$ ou $\pm 2\%$ do valor em regime permanente. Assim o tempo de estabelecimento a 5% é o tempo a partir do qual se verifica $y(t) \in [y_{rp} - 0.05y_{rp}, y_{rp} + 0.05y_{rp}]$. O tempo de estabelecimento a 2% é o tempo a partir do qual se verifica $y(t) \in [y_{rp} - 0.02y_{rp}, y_{rp} + 0.02y_{rp}]$.

Para o modelo (3.160) pode mostrar-se que os parâmetros definidos acima dependem de ζ e ω_n (logo de $\omega_a = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$) da forma traduzida pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} t_p &= \frac{\pi}{\omega_a} \\ M_p &= 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \\ PO &= e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \\ t_s \text{ (a 2\%)} &\cong \frac{4}{\zeta\omega_n} & t_s \text{ (a 5\%)} &\cong \frac{3}{\zeta\omega_n} \end{aligned} \tag{3.168}$$

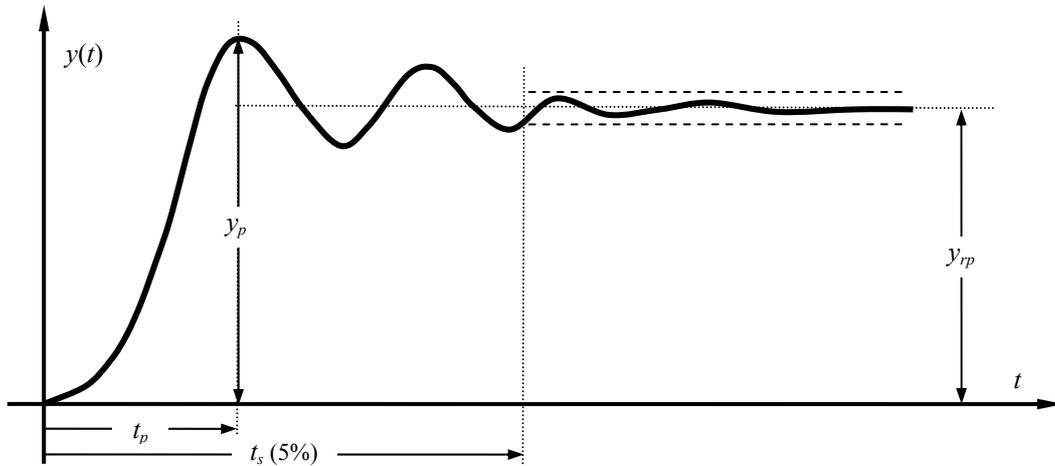


Figura 3-7 Ilustração de parâmetros comumente usados para caracterizar a resposta ao degrau de modelos estritamente estáveis (não necessariamente de segunda ordem e não necessariamente lineares).

3.5 Diagramas de blocos no domínio de Laplace

Os conceitos de função de transferência e de transformada de Laplace da evolução temporal de uma variável podem ser aplicados aos diagramas de blocos. Num diagrama de blocos *temporal* as setas representam variáveis e os blocos representam operadores temporais. Num diagrama de blocos no *domínio de Laplace*, as setas representam *transformadas de Laplace* de variáveis e os blocos representam *funções de transferência* de operadores. Veja-se a Figura 3-8 para um exemplo.

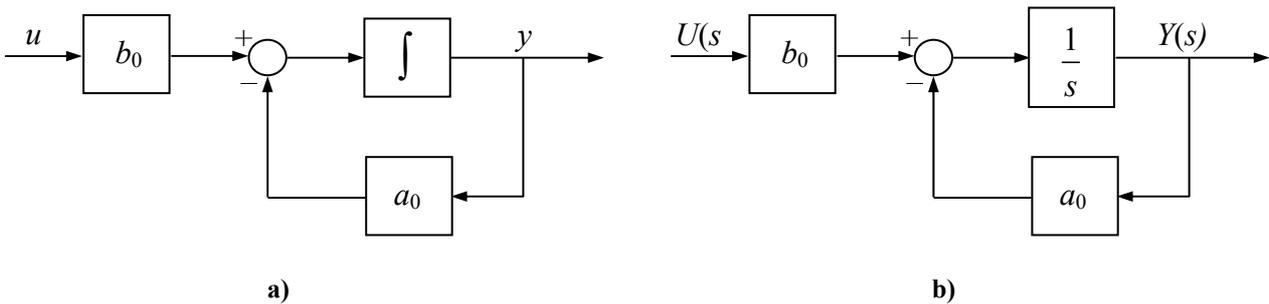


Figura 3-8 a) Diagrama de blocos temporal do integrador realimentado. b) Diagrama de blocos no domínio de Laplace do integrador realimentado. A função de transferência de um produto por constante é igual à constante. A função de transferência do integrador puro é igual a $1/s$.

Uma das razões que tornam os diagramas de blocos em Laplace particularmente úteis é o facto de um diagrama com vários blocos poder ser reduzido a um diagrama com um só bloco e vice-versa. Através da redução, é possível modelizar um sistema complicado, se forem conhecidas as funções de transferência dos seus subsistemas ou componentes.

A redução ou expansão de diagramas de blocos faz uso de equivalências entre diagramas baseadas em propriedades das transformadas de Laplace e pode ser sumariada em 5 equivalências. A primeira equivalência é verdadeira para diagramas no domínio de Laplace ou no domínio do tempo. As restantes podem ser estendidas ao domínio do tempo se for definido um operador de derivação temporal com propriedades correspondentes às da multiplicação pelo operador s no domínio de Laplace: existência de inverso, composição soma e composição produto.

Equivalência de pontos de soma

A propriedade associativa da adição permite reduzir pontos de soma ou expandi-los. A expressão

$$Y(s) = U_1(s) + U_2(s) + \dots + U_n(s) \quad (3.169)$$

pode ser representada em qualquer forma que a propriedade associativa da adição permita. Veja-se a Figura 3-9 para um exemplo.

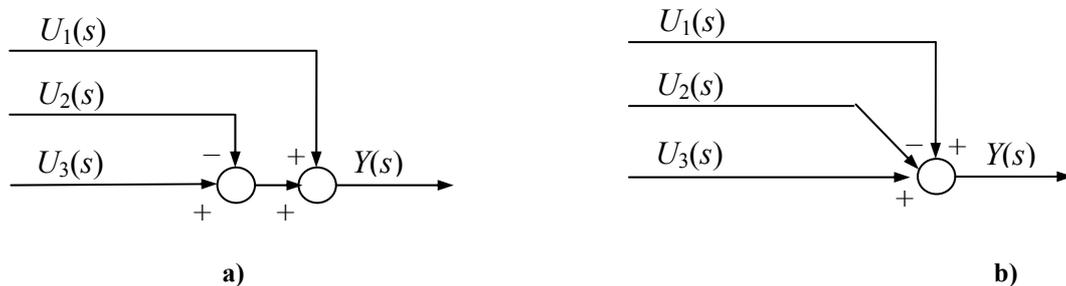


Figura 3-9 Exemplo de equivalência de pontos de soma dada a associatividade da adição. O diagrama em **b)** é equivalente ao diagrama em **a)**.

Equivalência série

Suponha-se que num diagrama de blocos encontramos 2 blocos em série como mostra a Figura 3-10a. Tem-se:

$$\begin{aligned} Y(s) &= H_2(s)X(s) \\ X(s) &= H_1(s)U(s) \end{aligned} \quad (3.170)$$

Substituindo a expressão de $X(s)$ na primeira equação obtém-se:

$$Y(s) = H_1(s)H_2(s)U(s) = [H_1H_2](s)U(s). \quad (3.171)$$

Ou seja, dois blocos em série são equivalentes a um só bloco cuja função de transferência é o produto das funções de transferência de cada um.

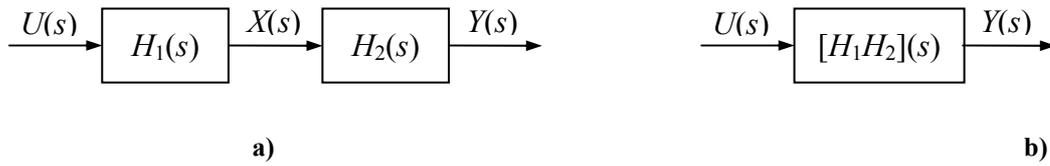


Figura 3-10 Equivalência de dois blocos em série. A função de transferência do bloco equivalente em **b)** iguala o produto das funções de transferência de cada um dos blocos em **a)**.

Equivalência paralelo

Suponha-se que num diagrama de blocos encontramos 2 blocos em paralelo como mostra a Figura 311a. Tem-se:

$$Y(s) = H_1(s)U(s) + H_2(s)U(s). \tag{3.172}$$

Aplicando a propriedade distributiva do produto em relação à soma obtém-se:

$$Y(s) = [H_1(s) + H_2(s)]U(s) = [H_1 + H_2](s)U(s). \tag{3.173}$$

Ou seja, dois blocos em paralelo podem ser substituídos por um só bloco cuja função de transferência é a soma das funções de transferência de cada um e vice-versa.

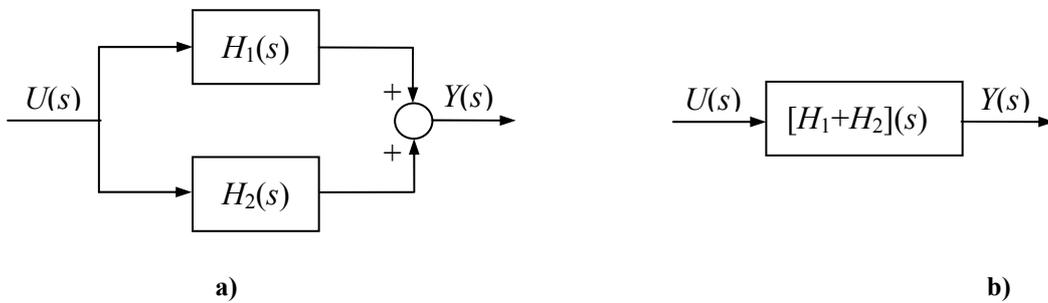


Figura 3-11 Equivalência de dois blocos em paralelo. A função de transferência do bloco equivalente em **b)** iguala a soma das funções de transferência de cada um dos blocos em **a)**.

Equivalência de um anel

Suponha-se que num diagrama de blocos encontramos 2 blocos formando um anel como mostra a Figura 3-12a. Tem-se:

$$Y(s) = H(s)[U(s) \pm G(s)Y(s)]. \tag{3.174}$$

A obtenção de um bloco equivalente ao anel obtém-se pela seguinte reescrita de (3.174):

$$\begin{aligned} Y(s) &= H(s)U(s) \pm H(s)G(s)Y(s) \\ Y(s) \mp H(s)G(s)Y(s) &= H(s)U(s) \\ Y(s)[1 \mp H(s)G(s)] &= H(s)U(s) \end{aligned} \tag{3.175}$$

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{H(s)}{1 \mp H(s)G(s)} U(s) \\
 &= \frac{H(s)}{1 \mp [HG](s)} U(s)
 \end{aligned}
 \tag{3.176}$$

Consoante o sinal da soma algébrica de $H(s)G(s)Y(s)$ é positivo ou negativo diz-se que o anel é de realimentação positiva ou negativa. A redução de anéis de realimentação negativa é particularmente frequente e está documentada na Figura 3-13. O caso particular de ser $G(s) = 1$, representado na Figura 3-14, merece também atenção especial.

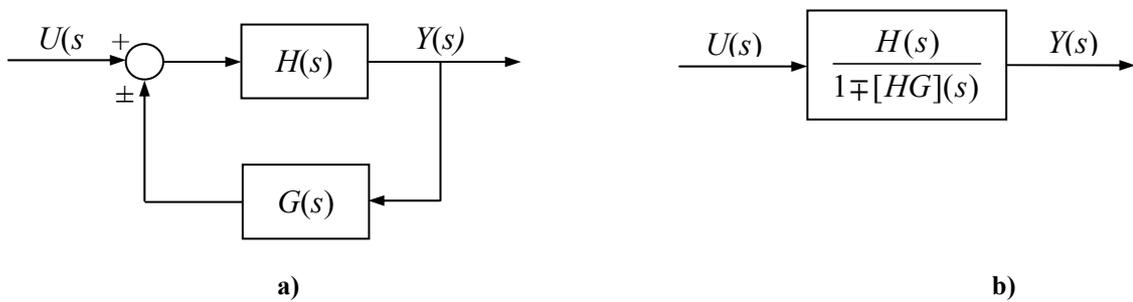


Figura 3-12 Redução de um anel de realimentação. A realimentação pode ser positiva (sinal +) ou negativa (sinal -).

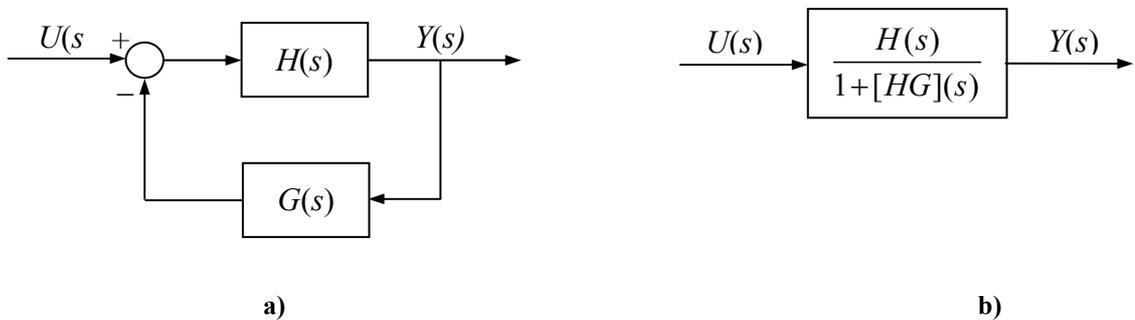


Figura 3-13 Redução de um anel de realimentação negativa. O denominador da função de transferência equivalente iguala 1 mais o produto das funções de transferência no anel.

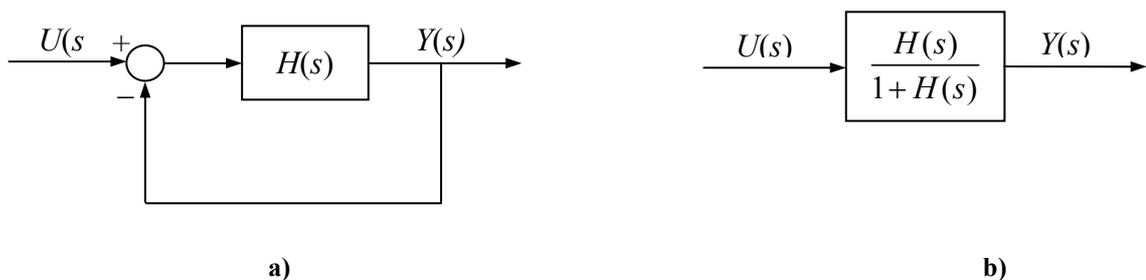


Figura 3-14 Redução de um anel de realimentação negativa em que a realimentação é unitária.

Deslocamento de um ponto de soma algébrica

Na transformação de diagramas de blocos é por vezes necessário obter um diagrama equivalente em que um ponto de soma está deslocado da saída de um bloco para a sua entrada. Suponha-se a configuração mostrada na Figura 3-15a. A expressão de $Y(s)$ escreve-se:

$$Y(s) = U_1(s) + H(s)U_2(s). \quad (3.177)$$

Como $H(s)H^{-1}(s) = 1$ podemos reescrever (3.177) na forma:

$$Y(s) = H(s)H^{-1}(s)U_1(s) + H(s)U_2(s). \quad (3.178)$$

Pondo $H(s)$ em evidência:

$$Y(s) = H(s)[H^{-1}(s)U_1(s) + U_2(s)]. \quad (3.179)$$

A equação (3.179) descreve o diagrama na Figura 3-28b.

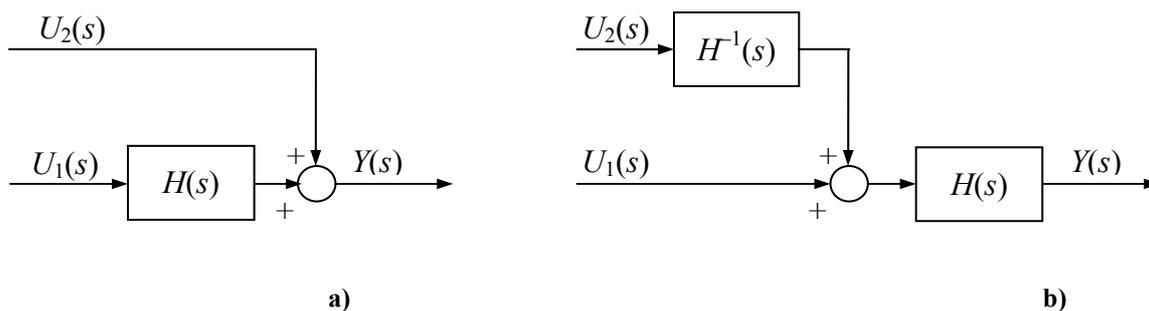


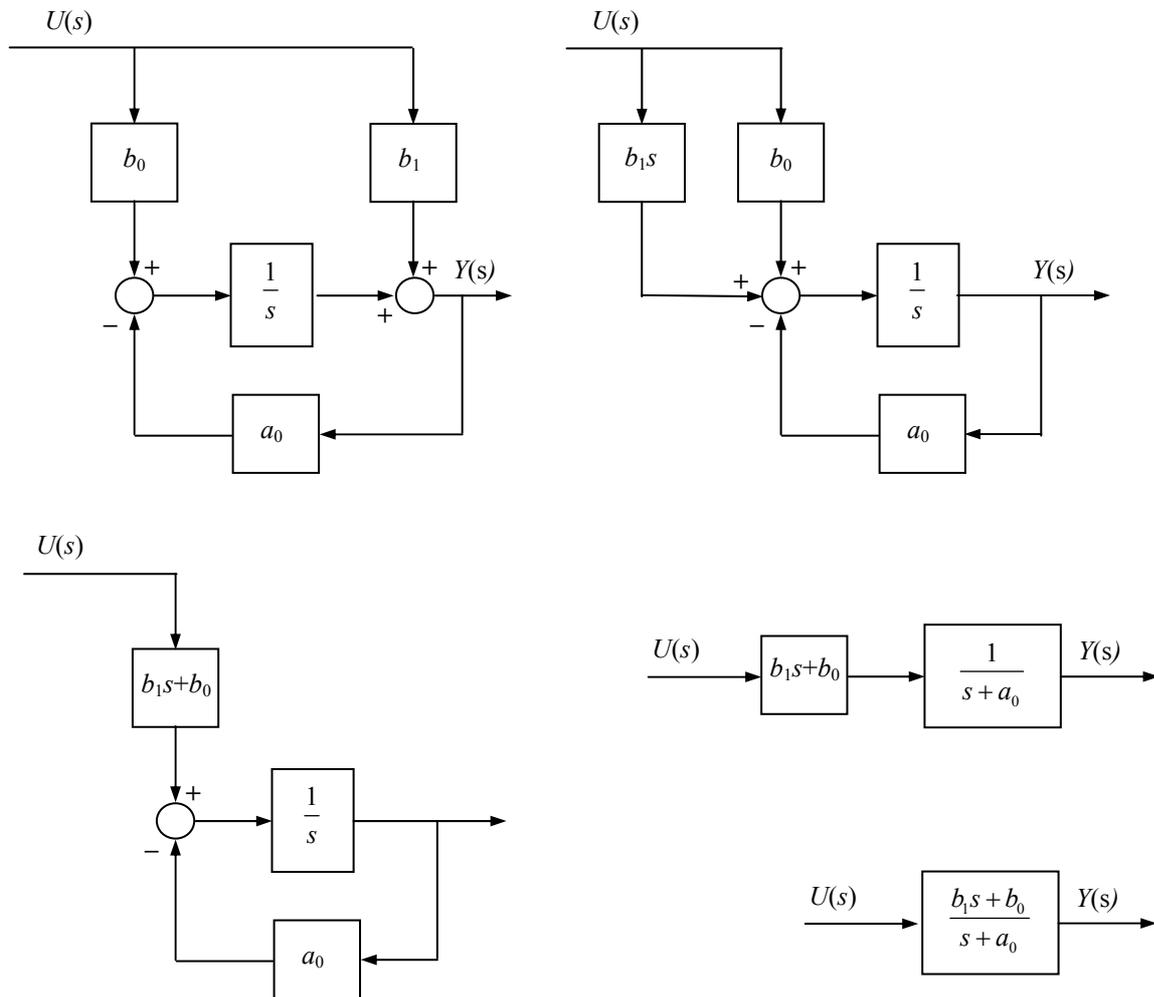
Figura 3-15 Deslocamento de um ponto de soma algébrica da saída de um bloco para a sua entrada.

O Exemplo 3-3 mostra a aplicação de todas as regras na redução do diagrama de blocos do modelo LIT diferencial causal de primeira ordem:

$$y' + a_0y = b_1u' + b_0u \quad (3.180)$$

Exemplo 3-3: redução do diagrama de blocos do modelo diferencial de primeira ordem.

O leitor deve tomar em consideração que as equivalências entre pontos de soma devidas à associatividade da adição não são explicitamente documentadas na sequência de diagramas.



3.6 Exercícios

- 3.1 Enuncie o problema da previsão da resposta livre de um sistema que aceita um modelo LIT.
- 3.2 Diga quais dos seguintes problemas dão origem a problemas de previsão de resposta livre e quais dão origem a problemas de previsão de resposta forçada.
- Um pára-quedista salta de um avião. Pretende saber-se com que velocidade vertical vai tocar no solo.
 - Um condensador de 1 mF está carregado a 5 V. Descarrega-se o condensador através de uma resistência de 1 K Ω . Qual a duração do intervalo de tempo necessário para que a tensão aos seus terminais seja inferior a 0.5V?
 - Um motor de corrente contínua, que acciona uma carga mecânica rotativa, está parado. É alimentado a uma tensão de 100 V. Que velocidade máxima vai atingir?
 - Um pêndulo em suspensão é deslocado da sua posição de equilíbrio de 0.01 rad e a seguir é largado. Com que frequência vai oscilar?

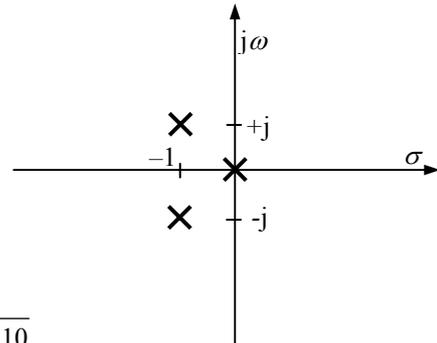
- v) Um automóvel desloca-se numa estrada horizontal. Subitamente “cai” numa depressão da estrada. Que tipo de oscilações vão ser produzidas no habitáculo?
- 3.3** Esboce um gráfico da função indicada em (3.6).
- 3.4** Determine os valores do *argumento* da função $1/s$ para os valores de s constantes da tabela na página 7.
- 3.5** Esboce um gráfico da função $b(t)$ que se obtém de (3.19) com $n = 2$ e $s_i = -1$.
- 3.6** Mostre que a transformada de Laplace da função $f(t) = \frac{1}{\omega} e^{-\sigma t} \text{sen}(\omega t)$ se pode obter como a soma de duas fracções cujos denominadores são respectivamente $s + \sigma - j\omega$ e $s + \sigma + j\omega$. Compacte a expressão da transformada numa única fracção. Esboce graficamente $f(t)$.
- 3.7** Mostre que a transformada de Laplace do impulso de Dirac é 1. Nota: considere o impulso de Dirac como aproximado por uma função $i(t)$ que é a soma de 2 degraus de amplitude $1/h$ e $-1/h$, o primeiro ocorrendo em $t = 0$ e o segundo atrasado do primeiro de h segundos; determine a transformada de $i(t)$ e o seu limite quando $h \rightarrow 0$, usando a regra de L'Hôpital.
- 3.8** Determine as antitransformadas de Laplace das funções $R(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+4)}$ e $T(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$, Compare graficamente as funções do tempo obtidas.
- 3.9** Um sinal causal $u(t) = 2\text{sen}4t$ é aplicado como entrada aos seguintes 3 sistemas com funções de transferência:
- a) $H(s) = \frac{1}{s+2}$ b) $H(s) = \frac{s}{s+2}$ c) $H(s) = \frac{s+1}{s+2}$
- Determine a expressão temporal das respostas forçadas para cada caso.
- 3.10** Suponha que no Exemplo 2-8 (sistema hidráulico) é $A = 2 \text{ m}^2$ e $R_h^* = 200 \text{ m}^3/\text{s}$. Suponha que inicialmente o tanque está vazio e que a motobomba produz um fluxo constante de água. Qual deve ser o valor deste fluxo para que o nível de água no tanque atinja 1 m em 5 min?
- 3.11** Determine a expressão geral da resposta de um circuito RC passa-alto (Exemplo 2-11) a uma entrada em impulso de Heaviside.
- 3.12** Considere o sistema mecânico do Exemplo 2-14 (sistema mecânico com inércia, atrito e elasticidade). Admita que os valores dos parâmetros são $M = 1; B = 2.5; K_e = 1$ e que o sistema está em repouso. Se for aplicada ao sistema uma força constante de 1 Nm, a evolução de $x(t)$ vai apresentar oscilações ou não?
- 3.13** Determine os pólos e os zeros das seguintes funções de transferência, escreva-as na forma zero-polar, desenhe o seu diagrama zero-polar e determine a sua resposta ao impulso de Dirac ou função de peso:
- a) $H(s) = -\frac{1}{s}$ b) $H(s) = \frac{2}{s^2}$
- c) $H(s) = \frac{10}{s^2 + 25}$ d) $H(s) = \frac{25}{s^3 + 25s}$ e) $H(s) = \frac{29}{(s+2)(s^2 + 25)}$.
- 3.14** Considere os diagramas zero-polares na Figura 3-8. Sem calcular antitransformadas, diga qual a forma da resposta ao Dirac de cada uma (das famílias) de funções de transferência representadas. Esboce gráficos de cada uma indicando valores que pode deduzir dos diagramas.

3.15 Repita o exercício anterior para o diagrama zero-polar à direita.

3.16 Determine a estabilidade dos modelos exemplificados e propostos nos exercícios do Capítulo 2.

3.17 Determine a estabilidade dos seguintes modelos:

$$H(s) = \frac{2}{(s+1)^2} \quad H(s) = \frac{2}{s^2 + 7s + 10} \quad H(s) = \frac{2}{s^2 + 3s - 10}$$



3.18 Determine as expressões do ganho em regime permanente ao degrau, quando possível, dos modelos exemplificados e propostos nos exercícios do Capítulo 2.

3.19 Um sistema mecânico tem a seguinte função de transferência:

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{16}{(s+1)^2 + 16}$$

Determine a amplitude de oscilação produzida na variável de saída $x(t)$ em regime permanente por uma evolução da força aplicada na entrada dada por $f(t) = 0.5 \cdot \text{sen}(4t)$ N.

3.20 Suponha um sistema para o qual se sabe que aceita como modelo o integrador realimentado. No entanto, não se conhecem os valores dos parâmetros K_{rp} e T . Um processo expedito de medir estes valores será aplicar à entrada do sistema um degrau de amplitude u_0 e registar num gráfico a evolução da saída y . Suponha que lhe entregam um gráfico que resultou de uma experiência deste tipo.

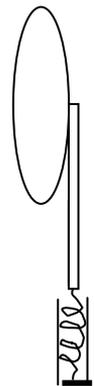
- Diga qual a forma que espera encontrar no gráfico de y .
- Diga, como a partir dos valores registados no gráfico, determinaria K_{rp} e T .

3.21 Uma antena parabólica orientável, tem momento de inércia J , roda num meio de coeficiente de atrito B , sob a acção de um binário m . A antena está presa a um ponto fixo por uma mola cujo coeficiente de elasticidade de torção é K .

a) Mostre que o modelo que relaciona a posição angular θ e o binário aplicado m é:

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + K\theta = m$$

- Determine a função de transferência do modelo. Se $J = 1$, $B = 0.1$, $K = 0.25$, determine a posição dos seus pólos no plano s .
- Determine a frequência natural de oscilação, o coeficiente de amortecimento do modelo e a frequência de oscilação amortecida.
- Determine a resposta temporal da posição angular da antena quando se aplica um degrau unitário de binário e $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0$.
- Nas condições de d) qual o valor de θ para $t = 1$ s. Qual o valor de θ em regime permanente? Qual o valor da sobre-elevação percentual máxima ('overshoot') da posição da antena? Qual o tempo de estabelecimento?
- Qual o ganho em regime permanente do modelo?



g) Se para um determinado instante de tempo após a posição angular da antena ter atingido o regime permanente, se fizer nulo o binário aplicado: qual a evolução temporal da posição da antena?

3.22 Um circuito LRC série com saída no condensador tem $L = 1$ mH e $C = 1$ mF.

- Determine o seu valor de frequência natural de oscilação.
- Determine a condição que deve satisfazer o valor de R para que o circuito seja subamortecido.
- Determine os valores de R , para que seja, respectivamente, $\zeta = 2$, $\zeta = 1$, $\zeta = 0.7$.
- Determine o valor de R para que a sobre-elevação percentual máxima ('overshoot') da tensão no condensador não exceda 1.1 V quando na entrada é aplicado um degrau de tensão unitário. Qual o tempo de estabelecimento nestas condições?

3.23 Um circuito com uma indutância L em série com um paralelo RC tem como entrada uma tensão v_i e como saída v_C , tensão aos terminais do condensador. Tem-se: $L = 5$ mH e $C = 500$ μ F.

- Determine o valor da sua frequência natural de oscilação.
- Determine o valor de R para que seja $\zeta = 0,1$.
- Se na entrada for aplicado um degrau de tensão qual o valor de sobre-elevação percentual máxima ('overshoot') da tensão no condensador?

3.24 Suponha um sistema para o qual se sabe que aceita como modelo o oscilador amortecido. No entanto, não se conhecem os valores dos parâmetros K_p , ω_a e ζ . Um processo expedito de medir estes valores será aplicar à entrada do sistema um degrau de amplitude u_0 e registar num gráfico a evolução da saída y . Suponha que lhe entregam um gráfico que resultou de uma experiência deste tipo.

- Diga qual a forma que espera encontrar no gráfico de y .
- Diga, como a partir dos valores registados no gráfico, determinaria K_p , ω_a e ζ .

3.25 Reduza o seguinte diagrama de blocos a um só bloco equivalente com entrada $R(s)$ e saída $Y(s)$.

