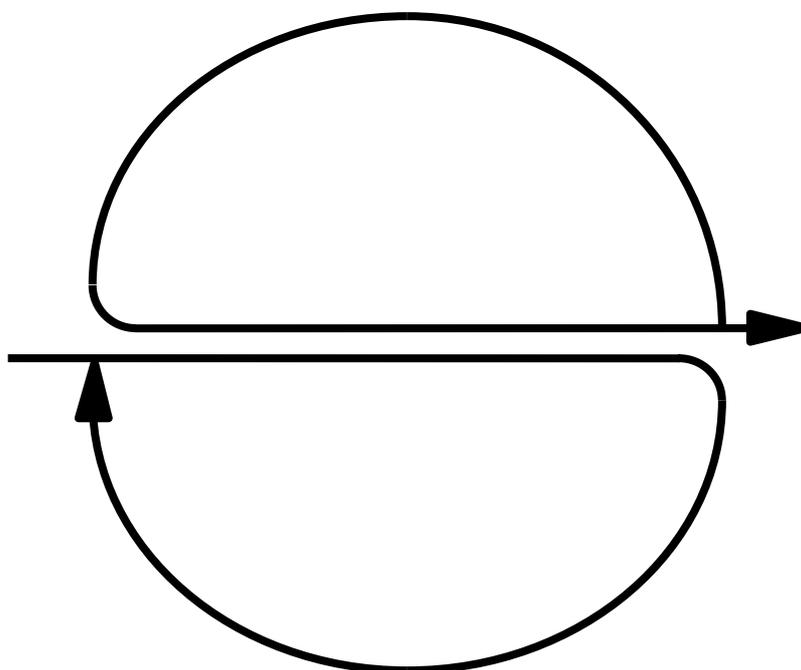


Elementos de Controlo Automático

2 – Modelos LIT



PAULO GARRIDO

Escola de Engenharia da Universidade do Minho

Elementos de Controlo Automático / 2 Modelos LIT /

© 2004-05 Paulo Garrido – Universidade do Minho

Informação de direitos de autor.

Esta publicação, incluindo a faculdade de impressão, destina-se aos alunos dos cursos de engenharia da Universidade do Minho.

Pode ser utilizada por outras pessoas para fins exclusivos de aprendizagem, desde que o documento seja integralmente mantido. Qualquer outra utilização sem autorização do autor é ilícita. Este pode ser consultado em pgarrido@dei.uminho.pt

Índice

2.1 Porquê modelos LIT?	1
2.2 Que linguagem para escrever modelos LIT?	2
Que símbolos de variável e qual o seu uso em \mathcal{L}_{MLIT} ?	3
Que símbolos de constante e qual o seu uso em \mathcal{L}_{MLIT} ?	4
Que símbolos de operadores temporais e qual o seu uso em \mathcal{L}_{MLIT} ?	5
Que símbolos relacionais e qual o seu uso em \mathcal{L}_{MLIT} ?	6
Que símbolos lógicos e qual o seu uso em \mathcal{L}_{MLIT} ?	6
2.3 Representação de modelos por diagramas de blocos	6
2.4 Modelos elementares LIT	8
Produto de variável por constante	9
Soma de variáveis	11
Modelo de atraso no tempo de uma variável	11
O integrador puro	13
O modelo de atraso unitário em tempo discreto	14
2.5 Modelos LIT compostos	14
O integrador com ganho	17
Estabelecimento de modelos dinâmicos LIT SISO	19
2.6 Conclusões	31
2.7 Exercícios	31

2

MODELOS LIT

Objectivos *Linguagem formalizada para escrever modelos LIT. Operadores temporais de modelos LIT. Representação de modelos por diagramas de blocos. Modelos elementares com operadores causais. Estabelecimento de modelos não-elementares, escritos na forma de equações diferenciais SISO.*

2.1 Porquê modelos LIT?

Os modelos comportamentais de sistemas lineares e invariantes no tempo, abreviadamente LIT, são de aplicação muito geral. Muitos sistemas têm domínios de comportamento que podem ser adequadamente descritos por modelos LIT. A esta vantagem de *aplicabilidade* da descrição, somam-se:

- A *simplicidade* da sua estrutura teórica que determina também propriedades simples de comportamento;
- A *adequação* do comportamento linear para muitas situações de projecto de sistemas.

Tendo o cuidado de não tomar conceitos e resultados de modelos LIT como universais, os modelos LIT são também um bom ponto de partida para aprender modelos variantes no tempo (VT) e modelos não-lineares (NL). A Figura 2-1 mostra o posicionamento dos modelos LIT dentro das 4 classes de modelos: LIT, LVT, NLIT, NLVT.

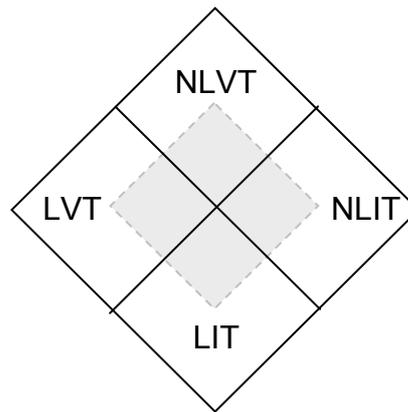


Figura 2-1 Classificação de modelos quanto à linearidade e variância no tempo dos parâmetros. O quadrado interno sombreado representa modelos *contínuos* no tempo

A estrutura dos modelos LIT é também a mais simples das 4 classes. Por todas estas razões faz sentido iniciar por eles o estudo da modelização de sistemas.

2.2 Que linguagem para escrever modelos LIT?

Um modelo de um sistema é uma descrição e uma descrição realiza-se com recurso a uma linguagem. Uma linguagem tem *sintaxe* e *semântica*. A sintaxe trata das questões de correcção das *construções* da linguagem e a semântica das questões de *significado*.

Numa *linguagem formal*¹ sintaxe e semântica estão rigorosamente definidas. A sintaxe define os *símbolos* ou *palavras* da linguagem e as *regras* para construir *sequências de símbolos* ou *frases*. Estas regras devem ser tais que será sempre possível determinar se uma sequência arbitrária de símbolos é ou não uma frase da linguagem. A semântica estabelece como devem ser *interpretados* quer os símbolos ou palavras, quer as suas sequências ou frases.

Podemos expressar modelos comportamentais numa linguagem formalizada \mathcal{L}_{MLIT} cujo *léxico*² se reparte nos seguintes *tipos* de símbolos:

- de *variável*³,

¹ As linguagens formais nasceram na Lógica. Os lógicos aperceberam-se que a *linguagem natural* é demasiado *complexa* do ponto de vista sintáctico e demasiado *ambígua* do ponto de vista semântico para nela se poder tratar com êxito as questões lógicas. O passo decisivo na criação de linguagens formais foi dado por Gottlob Frege, com a publicação em 1879 da sua obra *Begriffsschrift,...* (Escrita conceptual,...). Desde então muitas linguagens formais foram criadas, em particular, as linguagens de programação de computadores.

² Por léxico entende-se o conjunto de símbolos ou de palavras da linguagem. Numa linguagem formal, um símbolo corresponde a uma palavra.

³ Um símbolo de variável da linguagem não é sinónimo de variável do modelo.

- de *constante*,
- de *operadores temporais*,
- *relacionais*,
- *lógicos*.

Que símbolos de variável e qual o seu uso em \mathcal{L}_{MLIT} ?

Usaremos símbolos de variável da linguagem \mathcal{L}_{MLIT} como nomes de *variáveis ou parâmetros do modelo*. Entre os símbolos de variáveis da linguagem, distinguiremos em particular t que representa a variável tempo em modelos contínuos, assumindo-se $t \in \mathbb{R}$. Poderemos usar os símbolos t_0 e t_f para indicar os extremos inicial e final de um intervalo de tempo. A letra grega τ será usada para representar a variável tempo enquanto variável de integração, se o símbolo t for usado para representar um dos extremos do intervalo de integração. Em modelos discretos o símbolo k será usado para a variável tempo discreto ou número de instante de tempo. No caso de os instantes de tempo estarem igualmente espaçados de um certo período, este será simbolizado por h . Neste caso a relação entre tempo contínuo e tempo discreto será dada por $t = kh$.

Um modelo comportamental relata como as suas variáveis evoluem ao longo do tempo. As variáveis do modelo podem ser abstractas e, neste caso, usaremos u, v, w para variáveis de entrada, x para variáveis de estado, e y para variáveis de saída. Utilizar-se-ão índices numéricos se necessário. Se as variáveis do modelo forem concretas usar-se-ão símbolos usuais para as propriedades representadas, como a para aceleração e v para velocidade ou tensão eléctrica. Neste último caso, não se cumpre a regra de um símbolo só ter um significado. Em todos os casos que tal aconteça, o significado deve poder ser retirado do contexto.

Podemos estar interessados em interpretar os parâmetros de um modelo como quantidades abstractas que relacionam numericamente as variáveis comportamentais, caso em que usaremos as letras a, b, c, d, k, l , com índices numéricos se necessário. Ou interpretá-los como parâmetros do sistema concreto que se descreve (resistência, capacidade, massa, momento de inércia), caso em que se usarão símbolos usuais (R, C, M, J)⁴.

⁴ Para parâmetros de modelos usar-se-ão quer letras maiúsculas, quer letras minúsculas. Em geral, mas não obrigatoriamente, far-se-ão corresponder as maiúsculas a parâmetros com interpretação.

Exemplo 2-1: símbolos de variável no modelo de um circuito RC.

Seja o seguinte modelo de um circuito RC:

$$\frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_o(t) = \frac{1}{RC}v_i(t) \quad (2.1)$$

Os seus símbolos de variável são t , v_o , v_i , R e C . O símbolo t representa a variável tempo; v_o representa a variável de saída; v_i representa a variável de entrada; R e C representam respectivamente os parâmetros resistência e capacidade.

Note-se que parece legítimo considerar também $v_o(t)$ e $v_i(t)$ como símbolos de variável (compostos) em que se significa *explicitamente* haver dependência do tempo das variáveis v_o e v_i .

Que símbolos de constante e qual o seu uso em \mathcal{L}_{MLIT} ?

Os símbolos de constante de uma linguagem formal representam entidades individuais de um conjunto dado, pertencente ao domínio de discurso da linguagem. Símbolos desta classe, necessários para modelos comportamentais, serão agora discriminados.

Em muitos casos, os objectivos do nosso estudo serão realizados, se tratarmos os parâmetros do modelo como desconhecidos – embora assumindo que eles não mudam ao longo do tempo. Mas em muitos outros casos, será necessário atribuir aos parâmetros valores numéricos. Assim a linguagem deve ter acesso a todos os *numerais* que forem necessários.

Um numeral é uma representação simbólica de *um* número, obtida sem variáveis (pode ser considerada implicitamente a existência de operadores). Exemplos⁵: 1 0 0,5 π $\sqrt{2}$ e j 1,414 0.10_B 1F4_H.

Assim, os numerais necessários para particularizar ou instanciar parâmetros são símbolos de constante a incluir na linguagem \mathcal{L}_{MLIT} .

Os modelos comportamentais de sistemas falam das variáveis de um sistema com um objectivo específico: descrever o comportamento do sistema. A descrição do comportamento de um sistema é uma forma de descrever a evolução temporal dos valores das variáveis do sistema. Assim, quando um modelo de um sistema é posto a funcionar para nos dizer como o sistema se comporta ou se comportará, o que ele fornece (e o que ele requer) são evoluções no tempo de variáveis, representadas por *funções do tempo*. Quando num modelo se escreve $u(t)$, $v(t)$, $x(t)$, $y(t)$ pensa-se neste *termos* da linguagem como significando funções do tempo em geral⁶. Se num modelo particularizarmos (ou instanciarmos) a evolução da variável de

⁵ O exemplo “base dos logaritmos naturais” não está representado na notação usual, que exige estilo não-italico para símbolos de constante em domínios numéricos.

⁶ Estas funções deverão satisfazer o modelo. Se o modelo é uma equação diferencial, serão funções que retornam uma equação verdadeira ao substituírem as variáveis do modelo – reveja-se o Exemplo 1.11.

entrada $u(t)$ como uma certa função do tempo, por exemplo, $u(t) = e^{-t}$, então o modelo permitirá calcular a função do tempo que representa a evolução da variável de saída $y(t)$, por exemplo, $y(t) = te^{-t}$.

Quer na escrita de modelos, quer no seu “colocar em funcionamento”, necessitar-se-á de símbolos de constante que representam funções individuais. Não há qualquer razão para não considerarmos as funções como objectos matemáticos, da mesma forma que consideramos os números objectos matemáticos. Se representamos um número individual por um numeral, como representamos uma função individual? A resposta é: por uma expressão em que os únicos símbolos de variável são os argumentos da função. Exemplos: $\exp(2t)$, $h(t)$, $\sin(2t)$.

Exemplo 2-2: símbolos de constante em modelos de um circuito RC.

Suponha-se que, num circuito RC, o valor numérico de $1/(RC)$ é 1000. Então podemos rescrever o modelo (2.1) como:

$$\frac{dv_o(t)}{dt} + 1000v_o(t) = 1000v_i(t). \quad (2.2)$$

O modelo tem, então, 1 símbolo de constante que é o numeral 1000 (usado 2 vezes).

Suponha-se agora que se aplica à entrada do circuito uma tensão sinusoidal de amplitude 2 V e frequência angular 1 rad/s. Podemos descrever esta situação rescrevendo (2.2) como

$$\frac{dv_o(t)}{dt} + 1000v_o(t) = 2000\sin t \quad (2.3)$$

Este modelo tem então 3 símbolos de constante. Um é o numeral 1000. Outro o numeral 2000. E o terceiro é a expressão da função individual $\sin t$.

Que símbolos de operadores temporais e qual o seu uso em \mathcal{L}_{MLIT} ?

Qualquer modelo LIT, contínuo ou discreto, pode ser construído escolhendo os seus operadores de um conjunto de 8 elementos (y , saída e u , entrada):

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. Multiplicação por constante | $y(t) = c \cdot u(t);$ |
| 2. Soma de funções | $y(t) = u_1(t) + u_2(t);$ |
| 3. Atraso em tempo contínuo | $y(t) = u(t - T_a);$ |
| 4. Avanço em tempo contínuo | $y(t) = u(t + T_v);$ |
| 5. Integração com condição inicial | $y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau + y_0;$ |
| 6. Derivação | $y(t) = \frac{du(t)}{dt};$ |
| 7. Atraso em tempo discreto | $y(k) = q^{-1}[u(kh)] = u(kh - h);$ |
| 8. Avanço em tempo discreto | $y(k) = q[u(kh)] = u(kh + h);$ |

Os operadores 1 e 2 são estáticos. Se o modelo LIT for estático, usará apenas estes operadores.

Os operadores 3 e 4 são dinâmicos. O operador 3 modeliza fenómenos de *transporte*. Se o modelo LIT for causal, o operador de avanço não é necessário.

Os operadores 5 e 6 são dinâmicos. O operador 5 modeliza fenómenos de *acumulação* ou de *armazenamento*. Este operador pode interpretar-se como associando a $u(t)$ uma sua primitiva particular: aquela cujo valor para $t = 0$ é $y(0) = y_0$. Com efeito, tem-se:

$$y(0) = \int_0^0 u(\tau) d\tau + y_0 = 0 + y_0 = y_0. \quad (2.4)$$

Se o modelo for causal, o operador de derivação pode ser usado, mas não é necessário. No entanto, na escrita de modelos causais utiliza-se usualmente o operador de derivação em vez do operador de integração com condição inicial, visto que aquele permite uma escrita mais compacta. Este facto leva a que o modelo seja escrito como uma equação diferencial.

Os operadores 7 e 8 são dinâmicos. Modelizam o atraso ou avanço no tempo de um período de amostragem de uma função de tempo discreto. A sequência de valores de $y(k)$ é idêntica à de $u(k)$, mas está atrasada ou adiantada de um período de amostragem.

Que símbolos relacionais e qual o seu uso em \mathcal{L}_{MLIT} ?

O único símbolo relacional necessário em modelos LIT é o símbolo da igualdade.

Que símbolos lógicos e qual o seu uso em \mathcal{L}_{MLIT} ?

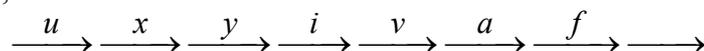
Na escrita de modelos LIT, os símbolos lógicos são usualmente deixados implícitos. O símbolo de conjunção lógica, necessário na escrita de sistemas de equações, é substituído pela chaveta.

2.3 Representação de modelos por diagramas de blocos

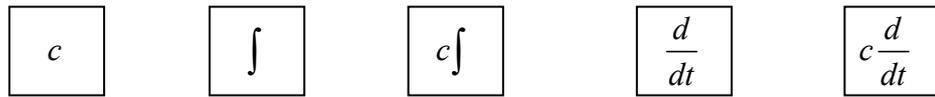
Os diagramas de blocos permitem representar os operadores do modelo de um sistema e as suas conexões por variáveis, de uma forma gráfica.

Um diagrama de blocos para um modelo LIT utiliza 3 elementos gráficos:

- setas, com ou sem etiqueta;



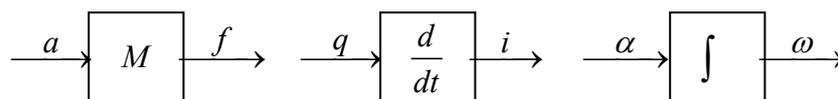
- blocos com etiqueta;



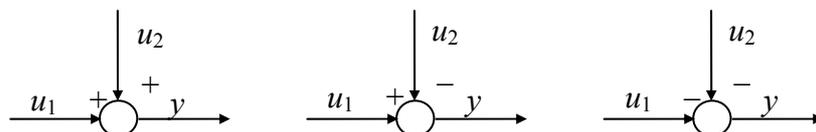
- pontos de soma algébrica de variáveis. ○

As setas representam variáveis. O ponto de soma algébrica de variáveis representa o operador de adição de funções. Os restantes operadores são representados por blocos. As etiquetas permitem associar nomes a setas e símbolos de operadores a blocos. Os blocos são desenhados como rectângulos.

A orientação das setas em relação ao bloco indica se a variável é considerada de entrada ou de saída.



Em volta dos pontos de soma colocam-se os sinais algébricos das variáveis que são somadas nesse ponto.



O operador de integração com condição inicial é representado como um bloco com duas entradas: a variável a ser integrada e a condição inicial da saída. Usualmente a condição inicial é omitida na representação. Veja-se a Figura 2-2.



Figura 2-2 Representações de um operador de integração com condição inicial, usualmente dito apenas um integrador. O valor de $y(0)$ não é uma variável do modelo propriamente dita, antes reflecte uma situação do sistema, para a qual o modelo vai ser aplicado. Por essa razão, ele é tomado implicitamente na segunda representação.

A representação gráfica de modelos tem diversas utilizações. Uma delas é basear a *simulação* de sistemas em computador. Em simulação é norma utilizar modelos escritos (ou

melhor, desenhados) apenas com integradores. Um problema comum é passar de um modelo escrito com derivadas para um modelo equivalente desenhado só com integradores. O Exemplo 2-3 mostra a ideia a usar.

Exemplo 2-3: modelo em diagrama de blocos do circuito RC.

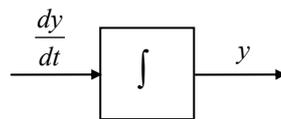
Considere-se o circuito RC da Figura 1-3. Já vimos que um seu modelo, escrito como uma equação diferencial pode ser:

$$\frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{RC}v_o = \frac{1}{RC}v_i.$$

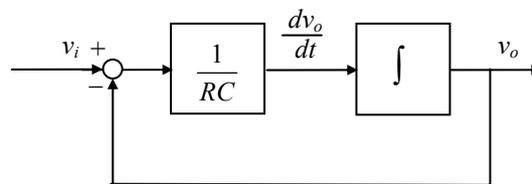
Para obtermos um modelo equivalente em diagrama de blocos, observamos que a equação acima estabelece que $dv_o(t)/dt$ vem dada por

$$\frac{dv_o}{dt} = \frac{1}{RC}(v_i - v_o).$$

Por outro lado, tem-se necessariamente que a derivada da saída do operador de integração é a sua entrada.



Segue-se que, usando um bloco integrador, um ponto de soma e um bloco de multiplicação por constante é possível obter um modelo gráfico equivalente à equação de partida, como a figura mostra.



2.4 Modelos elementares LIT

Modelos elementares são modelos constituídos por um só operador escolhido dos 8 listados acima. Nesta secção, iremos estudar os modelos elementares estáticos, de atraso no tempo e do integrador puro, todos eles contínuos e causais. Estudaremos também o modelo elementar discreto de atraso unitário.

Os modelos elementares estáticos são 2: produto de variável por constante e soma de variáveis. Modelos estáticos mais complicados realizam-se por composição destes. Como se referiu, o atraso no tempo modeliza fenómenos de transporte e o integrador fenómenos de acumulação ou armazenamento. Modelos dinâmicos mais complicados realizam-se combinando vários destes modelos (com modelos estáticos elementares).

Veremos que a simplicidade dos modelos elementares é acompanhada por uma grande utilidade. Muitas relações comuns entre variáveis de sistemas são descritas por modelos elementares.

Produto de variável por constante

Um modelo LIT estático constituído apenas pelo operador *produto de variável por constante* escreve-se na forma geral

$$y = bu \quad (2.5)$$

em que b é o parâmetro do modelo, muitas vezes referido por constante de proporcionalidade ou *ganho*. Se as variáveis y e u são interpretadas como variáveis com dimensões físicas $\dim(y)$ e $\dim(u)$, respectivamente, as dimensões de b são dadas por:

$$\dim(b) = \frac{\dim(y)}{\dim(u)}. \quad (2.6)$$

A Figura 2-3 representa a equação (2.5) em diagrama de blocos. Aplicações deste modelo estão listadas na Tabela 2-1.

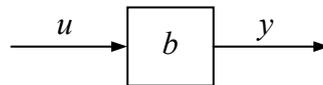
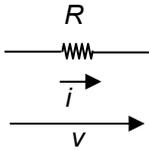
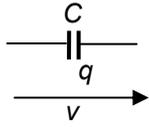
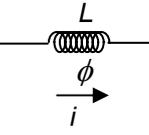
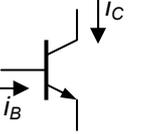
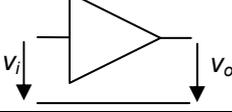
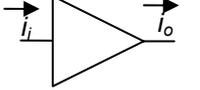
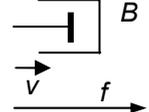
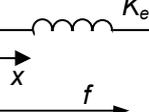
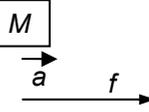


Figura 2-3 Diagrama de blocos para o produto de uma variável por uma constante.

Tabela 2-1 Exemplos de aplicação do modelo LIT estático produto de variável por constante. Sempre que razoável o parâmetro do modelo é escrito com letra maiúscula.

Elemento resistivo eléctrico		$i = Av$ $v = Ri$	v – tensão i – corrente R – resistência A – condutância ($A = 1/R$)
Elemento capacitivo eléctrico		$q = Cv$	q – carga v – tensão C – capacidade
Elemento indutivo eléctrico		$\phi = Li$	ϕ – fluxo magnético i – corrente L – indutância
Correntes num transistor		$i_C = h_{FE}i_B$	i_C – corrente de colector i_B – corrente de base h_{FE} – ganho em corrente do transistor
Amplificador de tensão		$v_o = Gv_i$	v_o – tensão de saída v_B – tensão de entrada G – ganho do amplificador
Amplificador de corrente		$i_o = Gi_i$	i_o – corrente de saída i_B – corrente de entrada G – ganho do amplificador
Elemento de atrito linear		$f = Bv$ $v = \frac{1}{B}f$	v – velocidade f – força B – coeficiente de atrito
Elemento de elasticidade		$f = K_e x$ $x = \frac{1}{K_e}f$	x – deslocamento f – força K_e – coeficiente de elasticidade
Elemento de inércia		$f = Ma$ $a = \frac{1}{M}f$	x – aceleração f – força M – massa
Energia térmica e temperatura de um corpo		$E_T = C_T \theta$	E_T – energia térmica θ – temperatura C_T – capacidade térmica
Volume e altura de líquido num tanque de paredes verticais		$V = Ah$	V – volume h – altura A – área da base

Soma de variáveis

A associatividade da adição permite reduzir qualquer soma de n variáveis com $n > 2$, a $n-1$ somas de duas variáveis. O modelo elementar constituído pelo operador temporal de soma binária, ou soma de duas variáveis, escreve-se:

$$y = u_1 + u_2. \quad (2.7)$$

A possibilidade de multiplicação das entradas pela constante -1 generaliza a soma, à soma algébrica. A Figura 2-4 mostra 3 variantes de soma algébrica de duas variáveis no formalismo dos diagramas de blocos. Na aplicação deste modelo haverá que respeitar a condição de as variáveis de entrada e a variável de saída serem da *mesma natureza* ou terem as *mesmas dimensões*, sem o que se chegará a modelos absurdos. A Tabela 2-2 apresenta exemplos de aplicação.

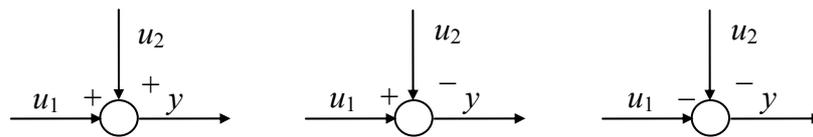


Figura 2-4 Soma, diferença e simétrico da soma de duas variáveis.

Tabela 2-2 Exemplos de aplicação do modelo LIT soma algébrica de variáveis.

Em modelos eléctricos	$i_3 = i_1 + i_2$ $v_3 = v_1 - v_2$	i – corrente v – tensão
Em modelos mecânicos	$x_3 = x_1 + x_2$ $v_3 = v_2 - v_1$ $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ $m_3 = m_2 - m_1$	x – deslocamento v – velocidade ω – velocidade angular m – binário
Em modelos térmicos	$P_3 = P_2 - P_1$	P – potência
Em modelos hidráulicos	$q_3 = q_1 + q_2$	q – caudal

Modelo de atraso no tempo de uma variável

Uma relação de atraso no tempo ou de atraso puro entre uma variável $y(t)$ e uma variável $u(t)$, representa-se pela igualdade

$$y(t) = u(t - T_a) \quad (2.8)$$

em que T_a é o tempo de atraso. A evolução de $y(t)$ é idêntica à de $u(t)$, mas está atrasada de T_a segundos em relação a esta.

A escrita matemática não torna evidente a existência de um operador temporal. Assim, a representação em diagrama de blocos é usualmente feita como a Figura 2-5 documenta. A razão do bloco ser etiquetado com a expressão e^{-sT_a} será clarificada em capítulo posterior. O Exemplo 2-4 descreve uma situação clássica, em que se necessita deste modelo elementar para descrever a relação entre 2 variáveis.

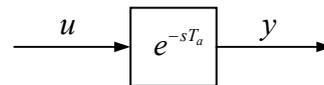
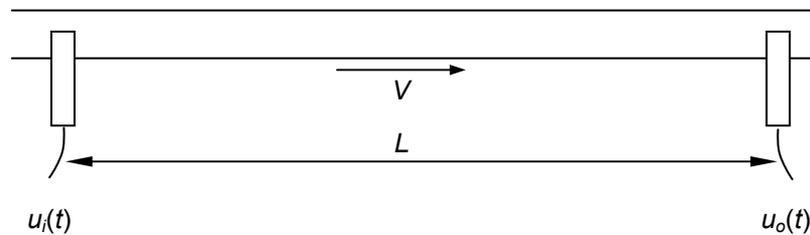


Figura 2-5 Diagrama de blocos para o modelo elementar ou operador temporal de atraso no tempo.

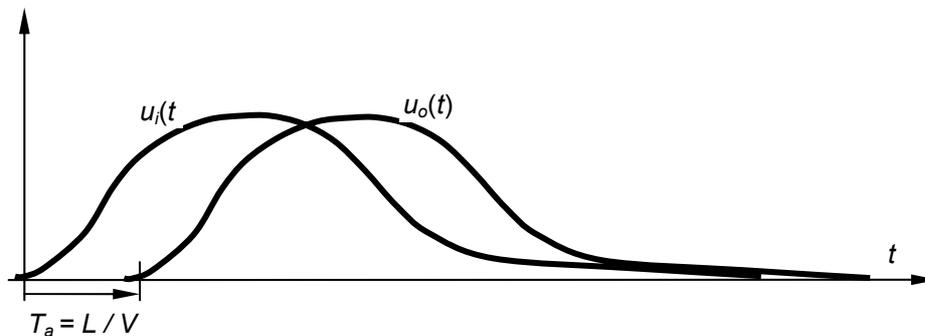
Exemplo 2-4: linha de atraso de sinal realizada com fita magnética.

Suponha-se uma fita magnética, deslocando-se com velocidade V para a direita. Uma cabeça magnética grava na fita um sinal eléctrico $u_i(t)$. Uma segunda cabeça magnética colocada à direita da primeira a distância L , lê o sinal gravado, gerando um sinal $u_o(t)$. Admitindo que o processo está livre de qualquer distorsão de sinal, a forma de $u_o(t)$ será igual à de $u_i(t)$, exceptuando o facto de estar atrasada em relação a esta de um tempo $T_a = L/V$. Portanto

$$u_o(t) = u_i(t - L/V).$$



A figura seguinte mostra o aspecto do registo gráfico de $u_i(t)$ e de $u_o(t)$ para uma evolução de $u_i(t)$ arbitrária.



Este exemplo mostra porque se diz que o atraso no tempo modeliza fenómenos de transporte.

O integrador puro

O modelo elementar de integração ou integrador puro escreve-se

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau + y(0). \quad (2.9)$$

A sua representação por um diagrama de blocos já foi feita, mas repete-se na Figura 2-6.

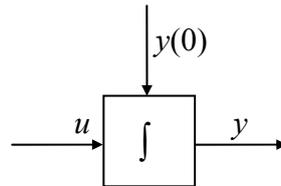


Figura 2-6 Diagrama de blocos para o modelo elementar com 1 operador temporal de integração de variável.

A variável de saída é o integral da variável de entrada se a condição inicial do integrador for nula. Se não o for, será a primitiva correspondente à condição inicial. Note-se que, seja qual for a condição inicial, a variável de entrada será sempre a derivada da variável de saída. Este facto permite uma representação escrita do operador ou modelo elementar mais compacta:

$$\frac{dy(t)}{dt} = u(t). \quad (2.10)$$

A Tabela 2-3 mostra exemplos de aplicação deste modelo.

Tabela 2-3 Exemplos de aplicação do integrador puro.

Variáveis eléctricas	$\frac{dq}{dt} = i$	q – carga i – corrente
	$\frac{d\phi}{dt} = v$	ϕ – fluxo magnético v – tensão
Variáveis mecânicas	$\frac{dx}{dt} = v$	x – deslocamento v – velocidade
	$\frac{dv}{dt} = a$	a – aceleração
	$\frac{d\theta}{dt} = \omega$	θ – deslocamento angular ω – velocidade angular
	$\frac{d\omega}{dt} = \alpha$	α – aceleração angular
Energia e potência	$\frac{dE}{dt} = P$	E – energia P – potência
Volume e caudal	$\frac{dV}{dt} = q$	V – volume q – caudal

A Tabela 2-3 permite compreender porque se diz que o operador de integração modeliza fenómenos de acumulação ou armazenamento⁷. A variável acumulada é a variável de saída do integrador, e a taxa instantânea de variação desta (ou a sua derivada em ordem ao tempo) é a variável de entrada do operador.

O modelo de atraso unitário em tempo discreto

A relação entre variáveis de saída e entrada deste modelo é descrito por equação:

$$y(k) = q^{-1}[u(kh)] = u(kh - h). \quad (2.11)$$

O operador q^{-1} atrasa a saída de um período de amostragem. Se este for tomado como implícito, a equação (2.11) pode escrever-se:

$$y(k) = q^{-1}[u(k)] = u(k - 1) \quad (2.12)$$

A Figura 2.7 representa a equação (2.12) em diagrama de blocos.

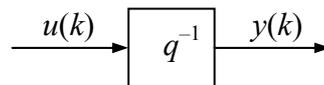


Figura 2-7 Diagrama de blocos para o produto de uma variável por uma constante.

Uma aplicação usual deste modelo é representar uma *memória* em que um valor é escrito no instante $k-1$ e é lido no instante k .

Da mesma forma que o modelo elementar do integrador puro pode ser escrito com recurso ao operador de derivação, o modelo de atraso unitário em tempo discreto pode ser equivalentemente escrito com recurso ao operador de avanço q :

$$y(k) = q^{-1}[u(k)] \Leftrightarrow qy(k) = u(k) \Leftrightarrow y(k + 1) = u(k). \quad (2.13)$$

2.5 Modelos LIT compostos

Definimos modelos LIT compostos como sendo modelos contendo mais do que um operador temporal. Em geral, necessitar-se-á de estabelecer este tipo de modelos para descrever sistemas. O objectivo desta secção será apresentar ideias e procedimentos para realizar este estabelecimento.

⁷ Ou de “desacumulação” ou “desarmazenamento”!

Começamos por estudar uma classificação possível das variáveis dos sistemas. Analisando modelos, dos tipos multiplicação por constante e integrador puro, observa-se que, em modelos de diferentes sistemas, as variáveis concretas desempenham papéis semelhantes. Este facto, permite classificar as variáveis em 4 classes ou tipos abstractos e relacionar estas classes através de 5 relações: 2 dinâmicas e 3 estáticas.

As classes ou tipos abstractos de variáveis são:

- Quantidade;
- Taxa de variação;
- Fluxo;
- Esforço.

A Tabela 2-4 mostra para diferentes sistemas a classificação das suas variáveis nestes 4 tipos.

Tabela 2-4 Classificação das variáveis de sistemas de diferente natureza.

Natureza do sistema	Taxa de variação r	Quantidade Q	Esforço e	Fluxo F
Eléctrico	Corrente i	Carga q	Tensão v	Fluxo magnético ϕ
Mecânico (translação)	Velocidade v	Deslocamento x	Força f	Quantidade de movimento p_x
Mecânico (rotação)	Velocidade angular ω	Deslocamento angular θ	Binário m	Quantidade de movimento angular p_θ
Fluido incompressível	Fluxo de massa q_m ou Fluxo de volume q_v	Massa m ou volume V	Pressão p	
Fluido compressível	Fluxo de massa q_m	Massa m	Pressão p	
Térmico	Fluxo de calor q_t	Energia térmica E_t	Temperatura θ	

Por inspecção da Tabela 2-4, podemos concluir que a relação que liga a variável abstracta do tipo “Taxa de variação” (simbolizada por r) com a variável abstracta do tipo “Quantidade” (simbolizada por Q) é a integração pura em ordem ao tempo. Por esta razão, a relação entre estas duas variáveis pode escrever-se, usando o operador temporal de integração:

$$Q(t) = \int_0^t r(\tau) d\tau + Q(0). \quad (2.14)$$

Em alternativa, podemos expressar (2.14) na forma equivalente e mais compacta:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = r(t). \quad (2.15)$$

Também por inspeção da Tabela 2-4, podemos concluir que a relação que liga a variável abstracta do tipo “Esforço” (simbolizada por e) com a variável abstracta do tipo “Fluxo” (simbolizada por F) é também a integração em ordem ao tempo. Por esta razão, a relação entre estas duas variáveis pode escrever-se usando o operador temporal de integração:

$$F(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau + F(0). \quad (2.16)$$

Em alternativa, podemos expressar (2.16) na forma equivalente e mais compacta:

$$\frac{dF(t)}{dt} = e(t). \quad (2.17)$$

Estas relações são chamadas integrais de causalidade.

Para além destas 2 relações dinâmicas entre variáveis abstractas, podemos verificar também a existência de 3 relações estáticas, do tipo produto por constante (cujos nomes são sugeridos pelos sistemas de natureza eléctrica):

- Relação capacitiva entre variáveis do tipo “Quantidade” e variáveis do tipo “esforço”: $Q = b_C \cdot e$;
- Relação resistiva entre variáveis do tipo “esforço” e variáveis do tipo “taxa de variação”: $e = b_R \cdot r$;
- Relação indutiva entre variáveis do tipo “Fluxo” e variáveis do tipo “taxa de variação”: $F = b_I \cdot r$.

Estas relações são chamadas relações constitutivas.

A classificação de variáveis apresentada e as diversas relações entre variáveis, podem sumariar-se no diagrama da Figura 2-8.

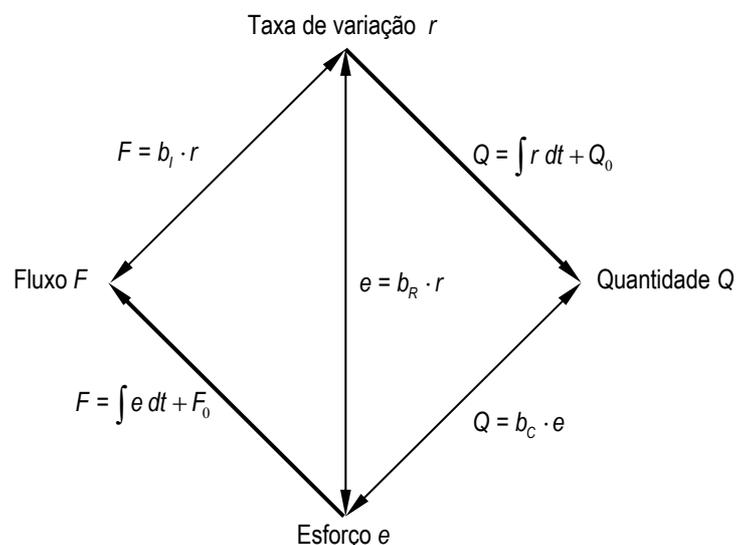


Figura 2-8 Diagrama dos 4 tipos de variáveis e das suas relações.

Na Tabela 2-5 apresentam-se os parâmetros das relações constitutivas – resistiva, capacitiva e indutiva – em sistemas comuns. Na Tabela 2-6 listam-se as correspondentes equações.

Tabela 2-5 Parâmetros das relações constitutivas em sistemas comuns.

Tipo de sistema	b_R (relação resistiva)	b_C (relação capacitiva)	b_I (relação indutiva)
Eléctrico	Resistência R	Capacidade C	Indutância L
Mecânico (translação)	Coefficiente de atrito B	Inverso do coeficiente de elasticidade $1/K_e$	Massa inercial M
Mecânico (rotação)	Coefficiente de atrito B	Inverso do coeficiente de elasticidade $1/K_e$	Momento de inércia J
Fluidico	Resistência hidráulica R_h		
Térmico	Resistência térmica R_t	Capacidade térmica C_t	

Tabela 2-6 Equações das relações constitutivas em sistemas comuns.

Tipo de sistema	Relação resistiva	Relação capacitiva	Relação indutiva
Eléctrico	$v = Ri$	$q = Cv$	$\phi = Li$
Mecânico (translação)	$f = Bv$	$x = \frac{1}{K_e} f \quad (f = K_e x)$	$p_x = Mv$
Mecânico (rotação)	$m = B\omega$	$\theta = \frac{1}{K_e} m \quad (m = K_e \theta)$	$p_\theta = M\omega$
Fluidico	$p = R_h q_m$		
Térmico	$\theta = R_t q_t$	$E_t = C_t \theta$	

O integrador com ganho

O modelo LIT composto mais simples, que se pode imaginar é o *integrador com ganho*. Este é um modelo em tempo contínuo e escreve-se (comparar com (2.10):

$$\frac{dy}{dt} = b_0 u. \quad (2.18)$$

A sua representação em diagrama de blocos pode ser feita em qualquer das formas apresentada na Figura 2-9.

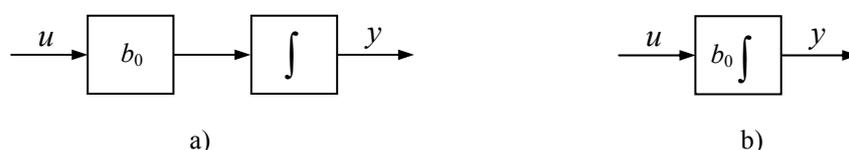


Figura 2-9 Diagramas de blocos para o integrador com ganho: a) com dois blocos; b) com um só bloco.

A variável de saída é o integral da variável de entrada multiplicada por uma constante. As considerações sobre o valor inicial da saída do integrador feitas no caso anterior aplicam-se também aqui. A Tabela 2-7 mostra exemplos de aplicação deste modelo.

Tabela 2-7 Exemplos de aplicação do integrador com ganho para descrever a relação entre 2 variáveis.

Corrente e derivada da tensão numa capacidade	$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C}i_C$	i_C – corrente v_C – tensão C – capacidade
Tensão e derivada da corrente numa indutância	$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}v_L$	v_L – tensão i_L – corrente L – indutância
Força e derivada da velocidade num meio sem atrito	$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{M}f$	v – velocidade f – força M – massa
Binário e derivada da velocidade angular num meio sem atrito	$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J}m$	v – velocidade angular m – binário J – momento de inércia
Caudal e derivada da altura de líquido num tanque de paredes verticais	$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}q$	h – altura q – caudal A – área da base do tanque

Pode observar-se que os modelos de produto por constante e do integrador puro podem ser postos em correspondência com uma só aresta no diagrama da Figura 2-8. O integrador com ganho pode ser posto em correspondência com 2 arestas sucessivas do diagrama. Por exemplo, para a primeira linha da Tabela 2-7, temos que, pelo integral de causalidade entre r e Q :

$$\frac{dq}{dt} = i.$$

E pela relação capacitiva entre Q e e :

$$q = Cv.$$

Substituindo esta última equação na primeira obtém-se:

$$C \frac{dv}{dt} = i.$$

Que é equivalente à equação na primeira linha da Tabela 2-7. Raciocínios semelhantes poderiam ser feitos para as outras linhas da tabela.

Estabelecimento de modelos dinâmicos LIT SISO

Tanto quanto é do conhecimento do autor não existe um “algoritmo”⁸ para *modelizar* ou estabelecer modelos dinâmicos de sistemas, quando estes modelos, devido à natureza do problema de modelização, têm que ser compostos. Há, no entanto, algumas ideias que podem ajudar muito.

Um sistema requer um modelo dinâmico:

- i) Se nele existirem fenómenos de acumulação ou de transporte de quantidades;
- ii) Se for necessário modelizar estes fenómenos, para se conseguir um modelo suficientemente preciso para os nossos objectivos.

As *quantidades* em causa podem ser energia, matéria, quantidade de movimento, carga eléctrica ou outras. Deixando os fenómenos de transporte por um momento de lado, vamos observar que para existirem fenómenos de acumulação ou de armazenamento, devem existir *armazenadores*.

Eis alguns exemplos de acumuladores ou armazenadores (entre parêntesis apresentam-se as equações⁹ para as quantidades acumuladas ou armazenadas):

- Elemento eléctrico com *capacidade* C :
Armazena energia eléctrica $\left(E = \frac{1}{2}Cv^2\right)$ sob a forma de carga electrostática $(q = Cv)$;
- Elemento eléctrico com *indutância* L :
Armazena energia eléctrica $\left(E = \frac{1}{2}Li^2\right)$ sob a forma de fluxo magnético $\phi = Li$;
- Corpo móvel com *massa* M :
Armazena quantidade de movimento $(p_x = Mv)$ ou energia cinética $\left(E = \frac{1}{2}Mv^2\right)$;
pode também dar-se o caso¹⁰ de armazenar energia potencial gravítica $(E = Mgh)$;
- Corpo móvel com *momento de inércia* J :
Armazena quantidade de movimento angular $(p_\theta = J\omega)$ ou energia cinética $E = \frac{1}{2}J\omega^2$;
- Corpo¹¹ com *elasticidade* K_e :

⁸ Por algoritmo. entende-se aqui um procedimento efectivo e universal para realizar um objectivo.

⁹ Os símbolos usados nas equações, foram definidos anteriormente.

¹⁰ Por exemplo, no caso de um pêndulo.

Armazena energia potencial elástica, quer em extensão ou compressão, quer em torção $\left(E = \frac{1}{2} K_e x^2 \text{ ou } E = \frac{1}{2} K_e \theta^2 \right)$;

- Tanque de paredes verticais:

Armazena quantidade de matéria, que se pode expressar em massa ou volume ($V = Ah$ ou $m = \rho V$, ρ – densidade);

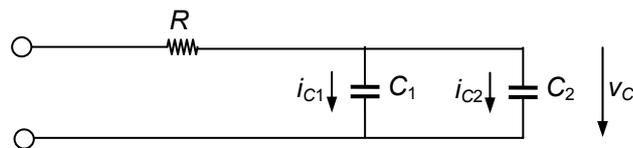
- Corpo com *capacidade térmica* C_t :

Armazena energia térmica ($E_t = C_t \theta$).

É importante compreender que quando se fala em armazenadores, se significa *armazenadores independentes*. Vamos clarificar esta ideia com um exemplo.

Exemplo 2-5: dois condensadores podem formar um só armazenador.

Considere-se o circuito seguinte:



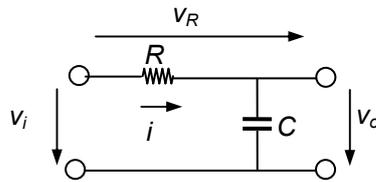
Este circuito tem 2 condensadores em paralelo. Cada condensador é um armazenador de carga, mas eles não são independentes, porque as tensões aos seus terminais são iguais. Os dois condensadores funcionam como 1 só armazenador de carga ou energia e devem ser tratados como tal.

As quantidades armazenadas obedecem a relações de conservação ou implicam relações de continuidade. Este facto faz com que o procedimento para estabelecer um modelo tenha usualmente 2 ou 3 passos:

- Estabelecer equações de continuidade ou conservação das quantidades (em geral, 1 equação para cada armazenador);
- Substituir, com recurso aos modelos elementares, os termos que aparecem nas equações, até se obter o modelo expresso nas variáveis que nos interessam; neste passo pode ser necessário derivar uma equação.
- Eventualmente, agregar as diferentes equações obtidas em i).

Ir-se-á exemplificar o processo através de vários exemplos de modelização. Por comodidade, a dependência das variáveis em ordem ao tempo, não será indicada explicitamente na escrita das equações.

¹¹ Tipicamente uma mola.

Exemplo 2-6: modelização de circuito RC passa-baixo (revisão).

Pretende-se um modelo externo ou de entrada-saída que relacione v_o com v_i , na forma normal.

Em geral, na modelização de circuitos eléctricos, usam-se, como primeira aproximação, as relações de Kirchoff. Quer para as malhas – o somatório das quedas de tensão numa malha deve ser nulo –, quer para os nós – o somatório de correntes num nó deve ser nulo. A primeira relação exprime o facto de que o integral de linha fechado do campo eléctrico deve ser 0 e a segunda exprime a conservação da carga (se de um nó saísse mais corrente do que aquela que entra, haveria criação de carga no nó). Aplicando a relação das malhas, tem-se que:

$$v_i = v_R + v_o. \quad (2.19)$$

O objectivo é, agora, exprimir v_R em função de v_o ou das suas derivadas, visto que num modelo externo SISO só aparecem a variável de entrada e a variável de saída. Pela relação de Ohm para tensão e corrente numa resistência (confrontar relação resistiva na Tabela 2-6), podemos transformar (2.19) para

$$v_i = Ri + v_o. \quad (2.20)$$

A corrente na resistência é a mesma que passa na capacidade. Numa capacidade, a corrente i iguala a derivada da carga q em ordem ao tempo (integral de causalidade). Se combinarmos isto com a relação capacitiva correspondente da Tabela 2-6, obtemos:

$$i = C \frac{dv_o}{dt}. \quad (2.21)$$

Esta relação aparece directamente na primeira linha da Tabela 2-7 do integrador com ganho. Substituindo a expressão da corrente i dada por (2.21) na equação (2.20):

$$v_i = RC \frac{dv_o}{dt} + v_o. \quad (2.22)$$

Normalizando obtemos o modelo na forma pretendida:

$$\frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{RC} v_o = \frac{1}{RC} v_i. \quad (2.23)$$

Vamos fazer uma observação muito importante. O modelo que obtivemos é concreto – as suas variáveis e parâmetros são concretos, visto que estamos a modelizar um sistema concreto. Se generalizarmos o modelo, substituindo as variáveis e parâmetros concretos por variáveis e parâmetros abstractos, obtemos um modelo abstracto.

$$\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u.$$

Ou, na notação mais compacta em que se indica a derivada por uma plica:

$$y' + a_0 y = b_0 u. \quad (2.24)$$

Observe-se que, interpretando (2.24) como um modelo abstracto correspondente a (2.23), se tem que $a_0 = 1/(RC)$ e $b_0 = 1/(RC)$. Logo, neste caso, $a_0 = b_0$, mas isto não acontecerá em geral, como veremos.

A representação do modelo abstracto (2.24) em diagrama de blocos apresenta-se na Figura 2-10. Este diagrama é equivalente ao que se obteve no Exemplo 2-3, para o circuito RC passa-baixo, visto que (2.23) implica $a_0 = b_0$.

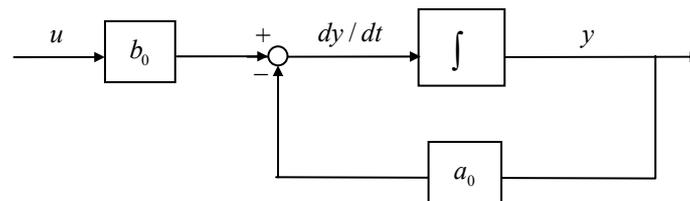


Figura 2-10 Diagrama de blocos do integrador realimentado – equação (2.24).

Exemplo 2-7: modelização de corpo com massa movendo-se num meio com atrito.

Suponha-se um corpo de massa M , que se move com velocidade v , num meio com coeficiente de atrito B , impulsionado por uma força f . A força resistente devida ao atrito é f_a . Esta força considera-se proporcional à velocidade v do corpo pela constante B (relação resistiva na Tabela 2-6). Pretende-se um modelo externo ou de entrada-saída que relacione v com f , na forma normal.

É usual, na modelização de sistemas mecânicos, aplicar-se a conhecida relação de Newton (a massa vezes a aceleração iguala o somatório das forças aplicadas):

$$M \frac{dv}{dt} = \sum_i f_i . \quad (2.25)$$

Assim sendo:

$$M \frac{dv}{dt} = f - f_a . \quad (2.26)$$

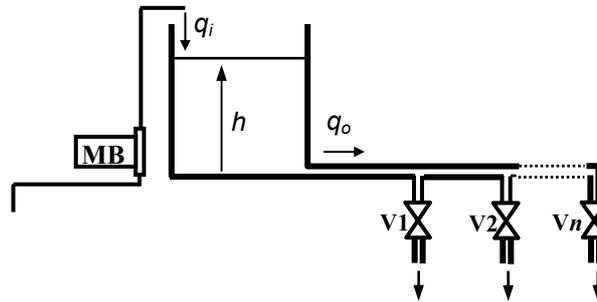
Similarmente ao exemplo anterior, precisamos agora de exprimir f_a em função de v ou das suas derivadas. Usando a relação resistiva referida:

$$M \frac{dv}{dt} = f - Bv . \quad (2.27)$$

Normalizando:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B}{M}v = \frac{1}{M}f . \quad (2.28)$$

Observe-se que o modelo abstracto correspondente tem a mesma forma de (2.24). Neste caso, ter-se-á em geral que $a_0 \neq b_0$. O diagrama de blocos correspondente é o da Figura 2-9.

Exemplo 2-8: modelização de sistema hidráulico.

O sistema hidráulico representado na figura permite alimentar pontos de consumo de água através das válvulas V1 a Vn. A motobomba **MB** lança no tanque água com um fluxo q_i . O fluxo de saída de água q_o depende da pressão p da água na base do tanque e do estado de abertura das válvulas V1 a Vn. o tanque tem área da base A e paredes verticais. Pretende-se um modelo de entrada-saída que relacione h , altura do nível de água, com q_i .

Porque a água é um fluido praticamente incompressível, podemos escrever, de forma algo similar à relação de Newton usada no exemplo anterior:

$$\frac{dV}{dt} = q_v = \sum_j q_j \quad (2.29)$$

em que V é o volume de água no tanque e q_v o fluxo total de água, igual ao somatório dos fluxos de entrada e de saída da água. Usando o facto de que $V = Ah$, e sendo A uma constante, rescrevemos (2.29) como:

$$A \frac{dh}{dt} = q_i - q_o. \quad (2.30)$$

De novo, temos que relacionar q_o em função de h e das suas derivadas. Pela relação resistiva na Tabela 2-6, tem-se que:

$$q_o = \frac{1}{R_h} p. \quad (2.31)$$

Em (2.31) R_h é a resistência hidráulica determinada pelas tubagens e pelo estado de abertura das válvulas. O objectivo é agora relacionar p com h . A pressão exercida por um coluna de água de altura h , volume V , massa M , e peso total P , na base que a suporta é

$$p = \frac{P}{A} = \frac{Mg}{A} = \frac{\rho Vg}{A} = \frac{\rho Ahg}{A} = \rho gh \quad (2.32)$$

em que A é área da base, ρ a densidade da água, e g a aceleração da gravidade. Se definirmos uma “resistência hidráulica asterisco”, R_h^* por

$$R_h^* = \frac{R_h}{\rho g} \quad (2.33)$$

obtemos a relação (estática) que procurávamos, pois podemos rescrever (2.31) como:

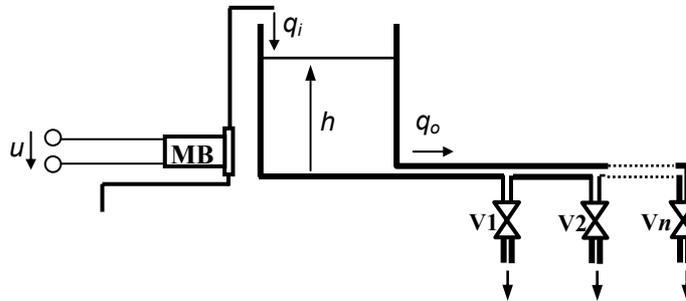
$$q_o = \frac{1}{R_h^*} h. \quad (2.34)$$

Substituindo (2.34) em (2.30) e normalizando obtemos finalmente:

$$\frac{dh}{dt} + \frac{1}{AR_h^*} h = \frac{1}{A} q_i. \quad (2.35)$$

Observemos que, mais uma vez, o modelo abstracto correspondente é da forma (2.24)!

Exemplo 2-9: modelização de sistema hidráulico com atraso puro.



Suponhamos que a motobomba é accionada por uma tensão eléctrica u . Vamos assumir que o fluxo q_i é proporcional a esta tensão por uma constante K . Mas que existe um tempo de atraso T_a , entre o instante de tempo t em que u muda de valor e o instante de tempo $t + T_a$ em que q_i fica igual a $K \cdot u$. O atraso é provocado pela necessidade do fluxo de água, que sai da motobomba, percorrer a tubagem, até ser lançado no tanque. Assim sendo:

$$q_i(t + T_a) = K \cdot u(t) . \quad (2.36)$$

É usual e conveniente rescrever (2.36) com o operador causal de atraso. Ou seja:

$$q_i(t) = K \cdot u(t - T_a) \quad (2.37)$$

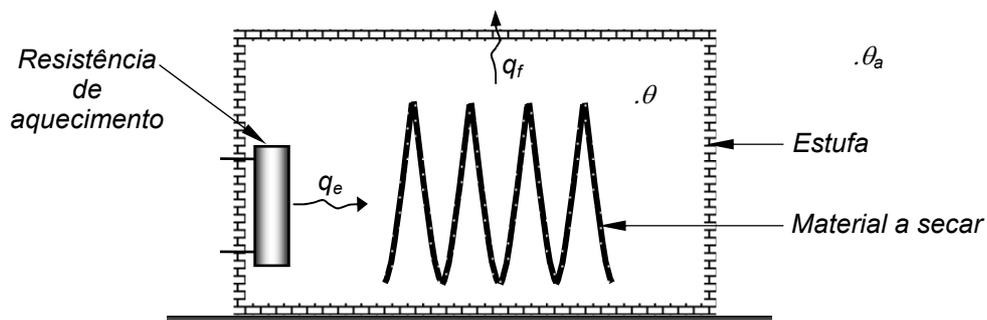
Pretende-se um modelo que relacione h e u . A solução é de alguma forma evidente. Rescreve-se (2.35) com as variáveis explicitamente dependentes do tempo e substitui-se na equação obtida $q_i(t)$ pela expressão (2.37). Vem:

$$\frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{AR_h^*} h(t) = \frac{K}{A} u(t - T_a) . \quad (2.38)$$

Este exemplo mostra a forma usual de proceder quando num sistema existe um atraso puro, que afecta a influência que a variável de entrada produz noutra variável do sistema. Escreve-se o modelo para as variáveis cujas relações não são afectadas pelo atraso e, depois, entra-se em linha de conta com este.

Exemplo 2-10: modelização de um sistema térmico.

Uma estufa para secagem de material é representada esquematicamente na figura seguinte. O elemento de aquecimento é uma resistência eléctrica de potência, que debita para o interior da estufa o fluxo de calor q_e .



As temperaturas do interior da estufa e do ambiente são representadas por, respectivamente, θ e θ_a . Devido à existência de um sistema que força a circulação do ar no interior da estufa, a temperatura θ supõe-se constante em qualquer ponto. Na construção de uma estufa, tenta-se evitar que haja perdas de calor através das suas paredes. Isto nunca se conseguirá por completo, de forma que a resistência térmica, entre a estufa e o ambiente, apresenta um valor R_t , que não é infinito. Como consequência, existirá sempre um fluxo de calor q_f da estufa para o ambiente, através das suas paredes. O valor da capacidade térmica da estufa é C_t . Pretende-se um modelo que relacione a temperatura θ do interior da estufa (variável de saída) com o fluxo de calor q_e fornecido pela resistência (variável de entrada).

Ao tentarmos deduzir um modelo linear para este sistema encontramos o seguinte problema. Se não for fornecido calor à estufa, ou seja, se $q_e = 0$, a temperatura da estufa tornar-se-á igual à temperatura ambiente: $\theta = \theta_a$. Isto significa que o modelo não pode ser linear, porque para uma entrada 0, apresentará uma saída diferente de 0 (confrontar com a situação análoga do Exercício 1.6). A forma de ultrapassar esta situação é:

- i) Considerar a temperatura θ_a constante.
- ii) Considerar como variável de saída do modelo a diferença, $\Delta\theta$, entre a temperatura do interior da estufa e a temperatura ambiente: $\Delta\theta = \theta - \theta_a$.

De acordo com a relação capacitiva na última linha da Tabela 2-6, e tomando em conta o ponto ii) acima, a energia térmica armazenada pela estufa, E_t , escrever-se-á:

$$E_t = C_t \theta = C_t (\Delta\theta + \theta_a). \quad (2.39)$$

Raciocinando como no Exemplo 2-8, escrevemos:

$$\frac{dE_t}{dt} = q_t = \sum_j q_j \quad (2.40)$$

Em (2.40), q_t é o fluxo total de calor, igual ao somatório do fluxo fornecido pela resistência com o fluxo de fugas. Usando (2.39), e atendendo a que C e θ_a são constantes, rescreveremos (2.40) como:

$$C_t \frac{d\Delta\theta}{dt} = q_e - q_f. \quad (2.41)$$

Temos agora que relacionar q_f com $\Delta\theta$. O fluxo de calor entre dois corpos a temperaturas diferentes é proporcional, com constante $1/R_t$, à diferença de temperatura entre eles (veja-se a relação resitiva na última linha da Tabela 2-6. Então:

$$C_t \frac{d\Delta\theta}{dt} = q_e - \frac{1}{R_t} \Delta\theta. \quad (2.42)$$

Normalizando, obtemos o modelo pretendido:

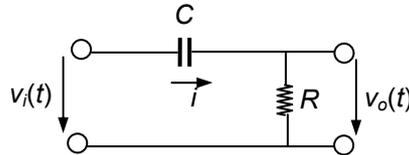
$$\frac{d\Delta\theta}{dt} + \frac{1}{R_t C_t} \Delta\theta = \frac{1}{C_t} q_e. \quad (2.43)$$

Este exemplo, mostra que, em certas situações, obter um modelo linear implica usar como variável do modelo a *variação* de uma variável em relação a um valor constante, em vez de usar a própria variável. Neste caso, usámos $\Delta\theta$, variação de θ em relação a θ_a , em vez de usarmos θ .

O modelo abstracto correspondente a (2.43) é também (2.24). Vamos agora estudar um exemplo, em que a equação diferencial que se obterá como modelo é de primeira ordem, como as anteriores, mas apresenta uma importante diferença.

Exemplo 2-11: modelo de circuito RC passa-alto.

A configuração de circuito RC na figura seguinte usa-se para transmitir sinais de tensão analógicos sem componente contínua ou para derivar sinais. Nesta configuração, a capacidade bloqueia a componente contínua de corrente.



Escrevendo a relação de Kirchoff para as tensões, obter-se-á:

$$v_i = v_C + v_o. \quad (2.44)$$

Como exprimir v_C em termos de v_o ? Exploremos o facto de que $i = v_o / R$ e i é a corrente na capacidade.

Pela relação constitutiva e pelo integral de causalidade:

$$v_C = \frac{1}{C} q = \frac{1}{C} \int i \, dt. \quad (2.45)$$

Substituindo em (2.44):

$$v_i = \frac{1}{C} \int i \, dt + v_o. \quad (2.46)$$

Derivamos ambos os membros para obter uma equação sem o símbolo de integração:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{C} i + \frac{dv_o}{dt}. \quad (2.47)$$

Substituindo i e normalizando:

$$\frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{RC} v_o = \frac{dv_i}{dt}. \quad (2.48)$$

O modelo abstracto correspondente a (2.48), é diferente de (2.24):

$$y' + a_0 y = u'. \quad (2.49)$$

No segundo membro da equação aparece a derivada da variável de entrada!

Para obtermos o diagrama de blocos correspondente a (2.49) começamos por isolar y' no membro esquerdo:

$$y' = u' - a_0 y. \quad (2.50)$$

Porque queremos obter um diagrama de blocos só com operadores causais, não o podemos desenhar a partir de (2.50)¹². Por isso, iremos primitivar ambos os membros da equação.

¹² Teríamos de usar um bloco derivador para obter u' .

$$\begin{aligned}
 \int y' dt &= \int (u' - a_0 y) dt \\
 \int y' dt &= \int u' dt + \int (-a_0 y) dt \\
 y &= u + \int (-a_0 y) dt
 \end{aligned}
 \tag{2.51}$$

A partir de (2.51), podemos desenhar o diagrama de blocos da Figura 2-11.

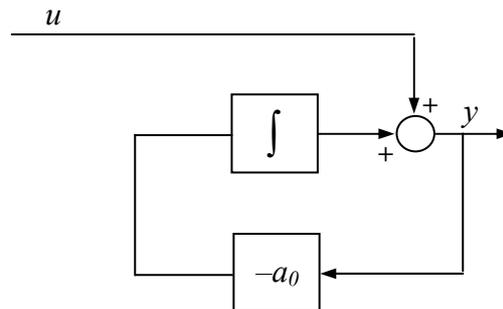
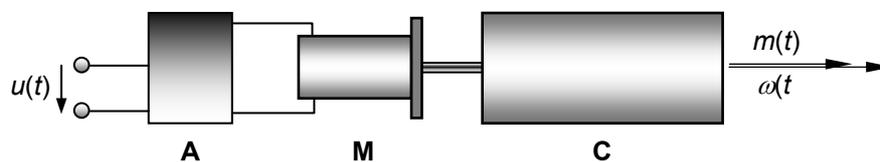


Figura 2-11 Diagrama de blocos para o modelo do circuito RC passa-alto.

Exemplo 2-12: modelização de um sistema mecânico de rotação sem elasticidade.

Consideremos um sistema mecânico de rotação constituído por um motor **M**, alimentado por um amplificador **A**, que acciona uma carga mecânica rotativa **C**.



Muitos sistemas mecânicos de rotação respondem a esta descrição geral: uma ferramenta rotativa para corte ou acabamento, o suporte de papel de um traçador de gráficos de tambor, um robô que roda sobre si-mesmo, uma antena, um espelho ou um painel solar orientáveis, etc. Eventualmente, existirá nestes sistemas uma caixa de engrenagens para desmultiplicação do movimento. Esta caixa de engrenagens não está representada na figura, mas o seu efeito, em termos de modelização, pode facilmente ser tomado em conta, caso haja necessidade.

O conjunto da carga mecânica e do rotor do motor são caracterizados por um momento de inércia de valor J e por um coeficiente de atrito de valor B (veja-se a terceira linha da Tabela 2-5).

O binário motor, m_m , produzido no eixo da carga é proporcional à tensão de entrada do amplificador: $m_m = K_m u$. Quando em rotação, o conjunto carga mecânica e rotor do motor é sujeito a um binário de atrito proporcional à velocidade angular: $m_a = B\omega$ (veja-se a relação resistiva na terceira linha da Tabela 2-6).

Começamos por pretender um modelo que relacione a velocidade angular ω com u .

A relação de Newton usada no Exemplo 2-6, quando aplicada a sistemas de rotação, dá-nos a seguinte equação de balanço:

$$J \frac{d\omega}{dt} = \sum_i m_i .
 \tag{2.52}$$

Que se lê como: o produto do momento de inércia pela aceleração angular iguala o somatório dos binários aplicados. No caso, estes são dois e de sinal contrário: o binário motor e o binário de atrito. Portanto:

$$J \frac{d\omega}{dt} = m_m - m_a. \quad (2.53)$$

Expressando o binário de atrito através da relação resistiva indicada:

$$J \frac{d\omega}{dt} = m_m - B\omega. \quad (2.54)$$

Expressando agora o binário motor em função de u e normalizando, obtemos:

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{B}{J}\omega = \frac{K_m}{J}u \quad (2.55)$$

Aumentamos agora a nossa ambição e pretendemos um modelo que relacione a posição angular θ com u .

Como a relação entre ω e θ é de integração pura (θ é o integral de ω), então

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega. \quad (2.56)$$

Segue-se que se substituirmos (2.56) em (2.55) obtemos o modelo pretendido:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) + \frac{B}{J} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) &= \frac{K_m}{J} u \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{B}{J} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{K_m}{J} u \end{aligned} \quad (2.57)$$

Observemos que o modelo abstracto correspondente a (2.55) é (ainda!) o modelo (2.24). Mas o modelo abstracto correspondente a (2.57) é:

$$y'' + a_1 y' = b_0 u \quad (2.58)$$

Enquanto que, nos casos anteriores, se tratava de uma equação diferencial de primeira ordem, neste caso, o modelo abstracto é uma equação diferencial de *segunda ordem*. A obtenção do diagrama de blocos correspondente não oferece dificuldades, explicitando y'' a partir de (2.58):

$$y'' = b_0 u - a_1 y'. \quad (2.59)$$

A entrada de dois integradores em série é a segunda derivada da saída, como mostra a Figura 2-12.

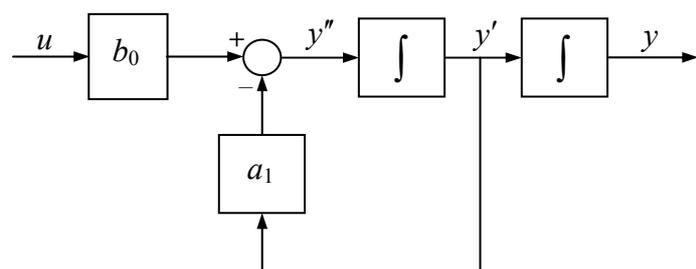


Figura 2-12 Diagrama de blocos para o modelo (2.59).

Exemplo 2-13: modelização das pequenas oscilações de um pêndulo sem atrito

Considere-se um pêndulo constituído por uma esfera de raio desprezável e massa M suspensa por uma haste de comprimento L , esta com massa desprezável. Se o pêndulo está desviado da vertical de um ângulo θ , o seu peso, (igual a Mg , com g a aceleração da gravidade) pode decompor-se em 2 componentes, veja-se a Figura 2-13. A componente radial é anulada pela reacção da haste. A componente tangencial p_T é a que provoca alteração no movimento do pêndulo. Tem-se que

$$p_T = Mg(-\text{sen } \theta) . \quad (2.60)$$

O binário sobre o pêndulo tem então o valor

$$m_T = -(Mg \text{ sen } \theta)L . \quad (2.61)$$

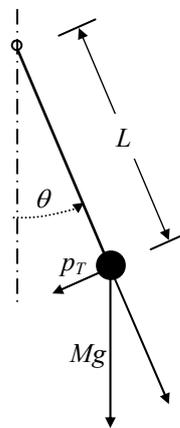


Figura 2-13 Pêndulo ideal oscilando num plano vertical.

A relação de Newton para o movimento de rotação (2.52), escreve-se, simbolizando por α a aceleração angular:

$$J\alpha = \sum_i m_i . \quad (2.62)$$

No caso do pêndulo, $J = ML^2$, $\alpha = \theta''$ e $m_T = p_T \cdot L$ é o único binário aplicado. Portanto:

$$ML^2 \theta'' = -MgL \text{ sen } \theta \quad (2.63)$$

Ou, simplificando

$$\theta'' + \frac{g}{L} \text{ sen } \theta = 0 . \quad (2.64)$$

Esta equação é não-linear devido à presença do termo em seno. Considerando que para pequenas oscilações ($|\theta| < \pi/40$), se tem que $\text{sen } \theta \cong \theta$, podemos rescrever (2.64) como o modelo linear do pêndulo sem atrito:

$$\theta'' + \frac{g}{L} \theta = 0 . \quad (2.65)$$

A sua solução para um deslocamento angular inicial $\theta(0)$ é:

$$\theta(t) = \theta(0) \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right) . \quad (2.66)$$

O pêndulo oscila em torno da sua posição vertical de repouso com frequência $\omega_n = \sqrt{g/L}$ rad/s.

Observemos que o modelo abstracto correspondente é:

$$y'' + a_0 y = 0 \quad (2.67)$$

O seu diagrama de blocos apresenta-se na Figura 2-14.

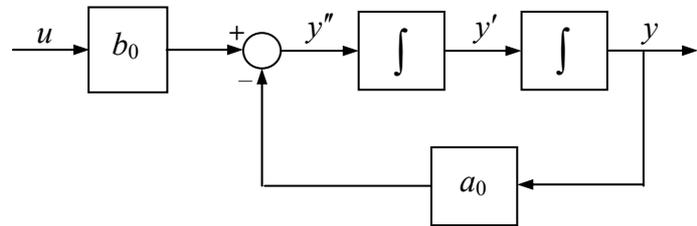
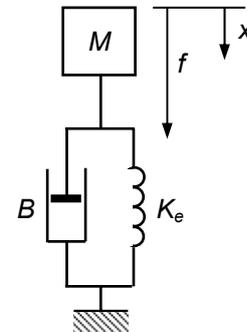


Figura 2-14 Diagrama de blocos do oscilador harmónico.

Exemplo 2-14: modelização de um sistema mecânico com inércia, atrito e elasticidade.

Considere-se um sistema mecânico com massa, atrito e elasticidade como na figura junta. O sistema é constituído por um corpo de massa M que se desloca na direcção x solidariamente com um amortecedor, cujo coeficiente de atrito é B , e com uma mola ou elemento elástico, cujo coeficiente de elasticidade é K_e . A massa é impulsionada por uma força externa f , colinear com x .

Esta configuração encontra-se em muitos sistemas mecânicos. Por exemplo, numa balança ou na suspensão de uma roda de um veículo automóvel.



Pretende-se um modelo que relacione o deslocamento x (variável de saída) com a força f (variável de entrada).

Aplicando a relação de Newton – o produto da massa pela aceleração iguala o somatório das forças aplicadas –, escrevemos:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum_i f_i \quad (2.68)$$

Neste sistema, as forças aplicadas, a considerar na modelização, são a força externa f , a força de atrito no amortecedor f_a e a força de reacção da mola f_e . As 2 últimas opõem-se a f . Portanto:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = f - f_a - f_e \quad (2.69)$$

As relações resistiva e capacitiva na segunda linha da Tabela 2-6, dizem-nos que:

$$f_a = B \frac{dx}{dt} \quad f_e = K_e x$$

Sucessivamente, substituindo em (2.69) e normalizando obtém-se o modelo pretendido :

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = f - B \frac{dx}{dt} - K_e x \quad (2.70)$$

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + K_e x = f \quad (2.71)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{B}{M} \frac{dx}{dt} + \frac{K_e}{M} x = \frac{1}{M} f \quad (2.72)$$

Observemos que o modelo abstracto correspondente a (2.72) tem a forma:

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b_0 u. \quad (2.73)$$

Esta equação é de segunda ordem como (2.58), com a diferença de que em (2.58) $a_0 = 0$. O seu diagrama de blocos, representado na Figura 2-15, obtém-se de forma similar ao diagrama anterior:

$$y'' = b_0 u - a_1 y' - a_0 y. \quad (2.74)$$

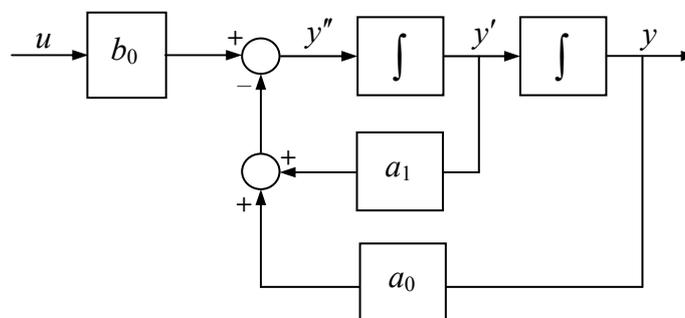


Figura 2-15 Diagrama de blocos para o modelo (2.74).

2.6 Conclusões

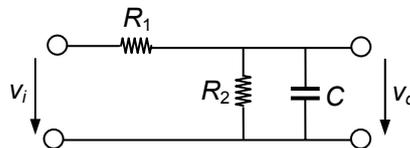
Neste capítulo apresentou-se uma linguagem para escrita de modelos lineares e invariantes no tempo (LIT). Introduziram-se também os diagramas de blocos como forma gráfica de os representar. Em seguida, estudaram-se os modelos elementares contínuos e causais, com o objectivo de se identificarem os blocos constituintes dos modelos compostos.

Na modelização de sistemas de interesse, são necessários modelos compostos. Foi apresentado um método de características gerais para o fazer. O estabelecimento destes modelos (da classe SISO) foi exemplificado com vários sistemas. Para cada sistema indicou-se qual o modelo abstracto correspondente ao modelo concreto obtido. Verificou-se que diferentes modelos concretos partilham o mesmo modelo abstracto.

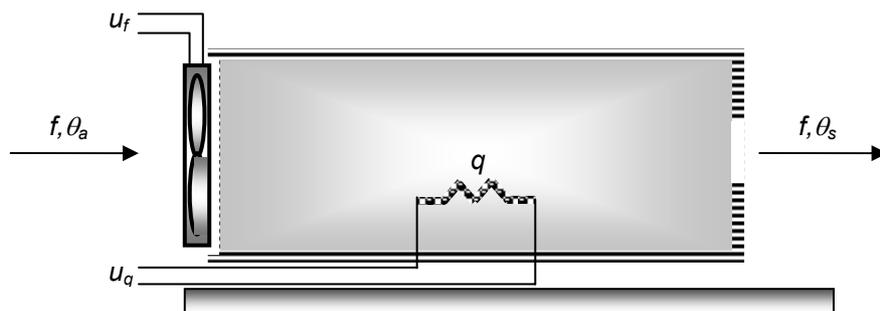
2.7 Exercícios

- 2.1 Qual a diferença entre símbolos de variável e símbolos de constante?
- 2.2 Um parâmetro de um modelo pode ser representado por um símbolo de variável?
- 2.3 Que letras se costumam usar para representar os parâmetros abstractos?
- 2.4 Escreva 4 símbolos de constante que sejam numerais e 4 que não sejam numerais.

- 2.5 Seja a igualdade $y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau + y(0)$. Que símbolos de variável, de constante, de operadores temporais e relacionais nela figuram?
- 2.6 Suponha um tanque de paredes verticais e com área da base A . O caudal de água que enche o tanque é q . Que modificações é preciso fazer na igualdade enunciada no Problema 2.1 para que ela represente a relação entre q e a altura h de água no tanque?
- 2.7 Represente em diagrama de blocos o modelo $\frac{d^2x}{dt^2} = a$, em que x é a posição de um corpo e a a sua aceleração.
- 2.8 Realize a representação em diagrama de blocos do modelo do circuito RLC apresentado no início do capítulo 1.
- 2.9 Determine as dimensões dos ganhos listados na Tabela 2-1.
- 2.10 Suponha que se quer realizar uma linha de atraso de 1 s. Alvitre pares de valores (L, V) para a implementação apresentada no Exemplo 2-4.
- 2.11 Um condensador de 1 mF é carregado com uma corrente constante de 1 A. Qual o valor da derivada da tensão aos terminais do condensador?
- 2.12 Um tanque de paredes rectas e com área de 2 m² está a ser esvaziado com um caudal de 0.005 m³/s. Determine o valor da derivada da altura de água no tanque.
- 2.13 Estabeleça um modelo para o seguinte circuito eléctrico.



- 2.14 Imagine um veículo automóvel que se desloca numa estrada horizontal, à velocidade constante de 70 Km/h. Sabe-se que o motor está a desenvolver uma potência de 5 Kw. Desprezando o atrito devido à fricção das rodas no solo, e supondo que o valor do atrito na atmosfera cresce linearmente com a velocidade, qual será o valor do coeficiente B do último? Nota: analisar o submodelo estático (2.28) e lembrar que a potência iguala o produto da força pela velocidade.
- 2.15 Uma câmara metálica para experiências laboratoriais de controlo tem esquematicamente a configuração indicada na figura seguinte.



Uma ventoinha accionada por uma tensão eléctrica u_f permite variar o fluxo de ar f que passa através da câmara. A potência calorífica q é libertada num elemento resistivo a cujos terminais pode ser

aplicada a tensão u_q .

O ar entra na câmara à temperatura θ_e . Esta é considerada ser a temperatura do ambiente em que está a câmara. A temperatura θ_s do fluxo de ar que sai, supõe-se ser prevalecente no interior da câmara. Assume-se que a câmara tem capacidade térmica C_s e resistência térmica para o ambiente R_t .

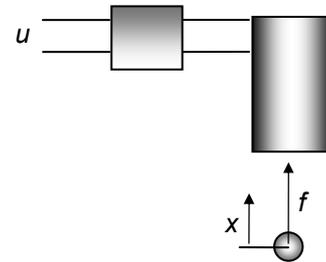
Pretende-se um modelo que relacione a elevação de temperatura $\Delta\theta = \theta_s - \theta_e$, com q , supondo que o fluxo de ar f é constante.

Para obter o modelo deve ter-se em conta que o fluxo q_t do calor transportado por um fluido (líquido ou gás), cujo calor específico é χ , vem dado por $q_t = \chi f \theta$ em que f é o fluxo do fluido e θ a sua temperatura.

Desenhar o diagrama de blocos correspondente.

2.16 Pretende-se fazer levantar uma pequena esfera metálica de massa M , colocando-a no campo magnético gerado por uma bobine.

A força f exercida na esfera, pelo campo da bobine, pode ser variada, para pequenos deslocamentos da esfera, variando a tensão de entrada u de um amplificador electrónico que alimenta a bobine.



Estabelecer um modelo que relacione o deslocamento x (ou alguma das suas derivadas) com a força f .

O modelo obtido é linear? Como o transformar para obter um modelo linear?

2.17 Num percurso similar ao do Exemplo 2-13, obter um modelo linear para pequenos deslocamentos do pêndulo rígido em inversão. De notar que aqui se mudará a origem de medida de θ que passará a ser a indicada na figura.

Aumentar o modelo para incluir um binário motor m_m aplicado no eixo do fulcro do pêndulo.

Para sentir a importância deste modelo, o leitor pode por-se em equilíbrio num só pé. A articulação do tornozelo equilibrante funciona como o fulcro do pêndulo, incluindo o binário motor que produz, a perna como a haste e o resto do corpo como esfera articulada!

