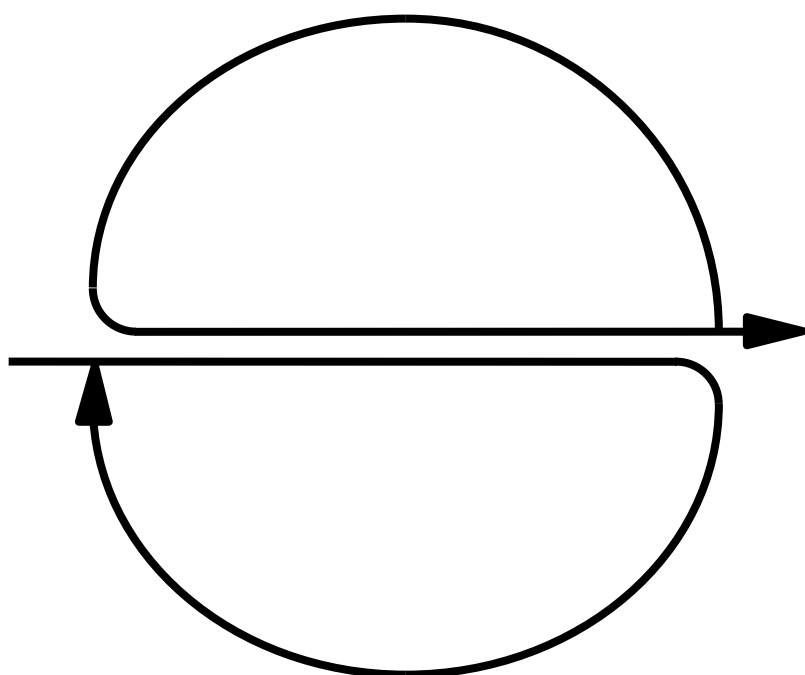


Elementos de Controlo Automático

1 – Sistemas e Modelos



PAULO GARRIDO

Escola de Engenharia da Universidade do Minho

Elementos de Teoria dos Sistemas/ 1 Sistemas e Modelos
© 2004 Paulo Garrido – Universidade do Minho

Informação de direitos de autor.

Esta publicação, incluindo a faculdade de impressão, destina-se aos alunos dos cursos de engenharia da Universidade do Minho.

Pode ser utilizada por outras pessoas para fins exclusivos de aprendizagem, desde que o documento seja integralmente mantido. Qualquer outra utilização sem autorização do autor é ilícita. Este pode ser consultado em pgarrido@dei.uminho.pt

Índice

1.1 Noção e Conceito de Sistema	1
O que se entende por um sistema?	2
Subsistemas e supersistemas	6
1.2 Modelos de Sistemas	6
O que é um modelo de sistema?	7
Um sistema pode ser modelo de outro sistema?	7
O que é um modelo estrutural de um sistema?	7
O que é um modelo comportamental de um sistema?	8
Para que se utilizam os modelos comportamentais?	10
As predições de um modelo são “sempre correctas”?	11
1.3 Classificação de Modelos Comportamentais	12
O que são modelos externos ou de entrada-saída?	13
O que é um modelo interno ou de estado?	14
O que é um modelo contínuo no tempo?	15
O que é um modelo discreto no tempo?	15
O que diferencia os modelos estáticos dos modelos dinâmicos?	18
Quando é que um sistema <i>admite</i> um modelo estático?	19
Quando é que um sistema <i>requer</i> um modelo dinâmico?	19
Submodelos estáticos	19
O que distingue modelos causais de modelos não-causais?	20
Qual a importância da distinção entre modelos lineares e não-lineares?	21
Porquê modelos invariantes e variantes no tempo?	23
Modelos de parâmetros concentrados e de parâmetros distribuídos	23
Exercícios	23

1

SISTEMAS E MODELOS

Objectivos *Noção de sistema: uma definição com duas leituras; componentes; subsistemas e supersistemas; fronteira e interior de um sistema; Modelos de sistemas; parâmetros, variáveis e comportamento de um sistema; modelos estruturais e comportamentais; utilidade dos modelos comportamentais. Classificação dos modelos comportamentais.*

1.1 Noção e Conceito de Sistema

A noção de *sistema* é hoje de uso comum. Diz-se, por exemplo:

- “... sistema de equações ...”
- “... sistema solar ...”
- “... sistema de produção de energia eléctrica ...”
- “... sistema político português ...”
- “... sistema de ideias ...”

Esta utilização reflecte a sua importância na Ciência. Físicos, químicos, biólogos, psicólogos, sociólogos vêem muitas das entidades que investigam como sistemas, fazendo apelo a conceitos e métodos da Sistémica, a ciência dos sistemas. Tal também acontece na Engenharia, onde a engenharia dos sistemas é uma especialidade reconhecida com grande

influência em outras áreas.

Engenheiros e cientistas necessitam de noções e conceitos, para exercer a sua profissão. Há uma diferença entre noção e conceito que importa compreender. Seguramente, eu tenho a noção do que é uma cadeira. Consigo reconhecer uma cadeira quando vejo uma e sei utilizá-la. Mas tenho também o conceito do que é uma cadeira? Por outras palavras: se me perguntarem o que é uma cadeira, consigo dar uma resposta satisfatória? Para mim, pelo menos? Posso tentar, dizendo: “uma cadeira é um conjunto formado por duas superfícies em que um ser humano se pode sentar apoiando as costas”. Este conceito de cadeira é único e o melhor? Único não é certamente. E é discutível com certeza. Mas funciona.

As noções são necessárias, porque, sem a noção de algo, não é possível conhecer verdadeiramente esse algo. De nada servirá a alguém que não possua a noção do que é uma cadeira, tentar compreender um possível conceito de cadeira. Por sua vez, os conceitos são necessários, porque sem eles não podemos falar uns com os outros das noções que temos e não as podemos aperfeiçoar, tornando-as mais explícitas, úteis e operacionais.

As noções ganham-se, experimentando, e os conceitos constroem-se, reflectindo. Ao construir-se um conceito para uma noção diz-se que se conceptualiza a noção. O facto de ser possível obter diferentes conceitos para a mesma noção, não deverá preocupar-nos. É pelo confronto de conceitos diferentes para uma noção que melhor a compreendemos e mais partido dela podemos tirar.

Vamos explorar a conceptualização da noção de sistema, colocando-nos a pergunta:

O que se entende por um sistema?

Podem dar-se diversas respostas a esta questão. Começaremos pela seguinte (forma A):

– Um sistema é um domínio de duas ou mais entidades relacionadas entre si que nós concebemos ou distinguimos como um todo.

Para que algo seja um sistema, necessariamente inclui mais do que uma entidade. É conveniente ver as entidades como formando um domínio, noção mais alargada que a de conjunto no sentido matemático, porque nem sempre nos é possível indicar as entidades do sistema como um conjunto. As entidades devem estar relacionadas entre si, porque se não for esse o caso, não faz sentido falar num sistema. E, finalmente, se não distinguirmos ou concebermos as entidades como *um* todo, não estaremos sequer a falar de *um* algo, logo não poderemos falar de um sistema.

Examinemos 3 exemplos.

Exemplo 1.1: circuito eléctrico ideal.

Considere-se o circuito eléctrico representado na Figura 1-1. Este circuito pode ser visto como um *sistema* em que as entidades são a indutância de valor L , a resistência de valor R , a capacidade de valor C , os terminais e as suas conexões.

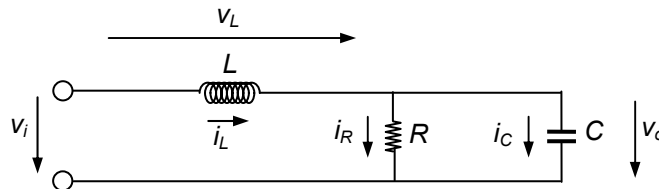


Figura 1-1 Configuração de circuito RLC.

Neste caso as entidades formam um conjunto no sentido matemático, visto que as podemos indicar todas. Sabemos exactamente quais são.

Exemplo 1.2: sistema de 5 equações descrevendo o comportamento de um circuito eléctrico.

As correntes e tensões eléctricas no circuito da Figura 1-1 podem ser relacionadas entre si através do seguinte *sistema* de 5 equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} i_C + i_R = i_L \\ v_L + v_o = v_i \\ i_C = C \frac{dv_o}{dt} \\ i_R = \frac{1}{R} v_o \\ v_L = L \frac{di_L}{dt} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

As entidades deste sistema são as 5 equações. As 2 primeiras resultam da aplicação das relações de Kirchhoff para as correntes e tensões. As 3 últimas relacionam correntes com tensões (ou suas derivadas).

Exemplo 1.3: sistemas de 2 equações descrevendo o comportamento de um circuito eléctrico.

Se nas 2 primeiras equações do sistema (1.1) substituirmos i_R , i_C e v_L pelas suas expressões dadas nas 3 últimas, obtemos o sistema de 2 equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} C \frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{R} v_o = i_L \\ L \frac{di_L}{dt} + v_o = v_i \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Este sistema foi obtido *transformando* o sistema (1.1) através de uma operação de substituição de variáveis e eliminação de equações. O resultado foi um sistema com menos equações, mas com a

mesma informação do sistema original no que respeita às relações entre v_o , i_L e v_i do circuito RLC. Uma outra transformação, que consiste em dividir cada uma das equações pelo coeficiente da derivada que nela aparece, permite-nos obter um sistema na forma *normal*:

$$\begin{cases} \frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{RC}v_o = \frac{1}{C}i_L \\ \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{L}v_o = \frac{1}{L}v_i \end{cases} \quad (1.3)$$

Este sistema tem exactamente a mesma informação do original (1.2) e a desvantagem de ser de leitura menos imediata. Devido à existência de regras bem conhecidas para o resolver, tem a vantagem de ser mais fácil calcular as suas soluções. Este exemplo mostra que 2 sistemas podem ser diferentes e equivalentes no que diz respeito a um certo objectivo. Neste caso, o objectivo é descrever as relações entre as variáveis v_o , i_L e v_i do circuito RLC.

É importante compreender que o distinguir ou conceber algo como um sistema depende do que se consideram as entidades do sistema. Substituindo na segunda equação de (1.2) a variável i_L pela sua expressão dada pela primeira equação

$$i_L = C \frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{R}v_o$$

e normalizando, obtém-se a equação diferencial:

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{LC}v_o = \frac{1}{LC}v_i. \quad (1.4)$$

Esta equação contém a mesma informação que os sistemas (1.1)(1.2)(1.3) sobre as variáveis v_o e v_i . Mas não pode ser concebida como um sistema de equações – visto que um tal sistema tem, pelo menos, 2 equações! Pode ser concebida como um sistema, não de equações, mas de outras coisas? A resposta é sim.

Exemplo 1.4: equação diferencial.

A equação diferencial

$$\frac{d^2v_o}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{LC}v_o = \frac{1}{LC}v_i$$

pode ser entendida como um sistema! Claramente não um sistema de equações, mas um sistema em que as entidades são os coeficientes ($1/RC$, $1/LC$), as variáveis (v_o e v_i), o operador de derivação (d/dt), a função produto ($\cdot$), a função soma (+) e a relação de igualdade (=).

O Exemplo 1.4 mostra 2 factos importantes sobre sistemas. O primeiro é que a resposta à pergunta “O que se entende por um sistema?” também pode ser (forma B):

– Um sistema é um todo que se distingue ou concebe como um domínio de entidades relacionadas entre si.

A forma A da resposta representa uma forma de pensar em que se parte das entidades para o sistema como um todo. A forma B da resposta representa uma forma de pensar em que se parte de um sistema como um todo para as suas entidades constituintes. Veja-se a Figura 1-2. Ambas estas formas de conceber ou distinguir sistemas são importantes em Engenharia.



Figura 1-2 Representação gráfica de duas formas de distinguir ou conceber um sistema. Das entidades para o todo (esquerda) e do todo para as entidades (direita).

O segundo facto mostrado pelo Exemplo 1.4 é que as entidades de um sistema podem ser por sua vez também sistemas.

Considerem-se mais alguns exemplos.

Exemplo 1.5: sistema solar.

A enumeração de todas as entidades relacionadas não faz sentido, dado o seu grande número e o desconhecimento de muitas delas. Uma enumeração corrente incluirá o Sol, os planetas e seus satélites, os asteróides e os cometas. Uma alternativa à enumeração de entidades é a indicação de uma propriedade que as entidades do sistema possuam. Pode experimentar-se definir as entidades do sistema como “o Sol e todos os corpos que influencia gravitacionalmente mais do que qualquer outra estrela”. Mas o que é um corpo? Uma molécula? Uma pedra? Um gás?

Exemplo 1.6: sistema de produção e distribuição de energia eléctrica.

Uma descrição sumária das entidades pode ser: centrais de produção de energia eléctrica, linhas de transmissão, subestações de abaixamento para média tensão, linhas de distribuição em média tensão, transformadores de abaixamento para baixa tensão, linhas de distribuição em baixa tensão.

Exemplo 1.7: sistema político português.

Quantas pessoas participam no sistema político português? Virtualmente, toda a pessoa com cidadania portuguesa. Assuma-se um conceito mais restrito e considere-se como entidades relacionadas do sistema os órgãos de soberania implicados no processo de elaboração e aplicação das leis. Tem-se então o conjunto: Presidente, Assembleia e Governo da República.

Exemplo 1.8: método científico.

O método científico de obtenção de conhecimento exemplifica um sistema de ideias. Uma descrição sumária destas pode ser a seguinte. Para conhecer a realidade: a) observar b) gerar hipóteses c) extrair

das hipóteses consequências que possam ser experimentadas d) experimentar e) publicar os resultados se estes forem de interesse.

Subsistemas e supersistemas

Para os sistemas que se consideram em Engenharia, é muitas vezes possível obter uma descrição das entidades do sistema como um *conjunto*, no sentido matemático do termo: colecção bem definida de objectos. Então falamos de *componentes* ou *elementos* de um sistema.

Se as entidades de um sistema formam um conjunto, então é possível definir *subsistema*, de uma forma análoga à que se usa para definir subconjunto. Um *subsistema* é uma parte de um sistema, que é por sua vez entendida como um sistema.

Suponha-se que um sistema S tem um certo conjunto de componentes $C(S)$, e que um sistema T tem um conjunto de componentes $C(T)$. T será um subsistema de S se $C(T) \subset C(S)$. Note-se que um subconjunto X de componentes de S , $X \subset C(S)$ não define necessariamente um subsistema de S : os componentes presentes em X podem não formar um sistema.

Suponha-se agora que um sistema S é subsistema de um sistema R mais vasto. Diz-se então que R é um *supersistema* de S .

O conceito de subconjunto de componentes permite definir facilmente o que são a fronteira e o interior de um sistema.

Pode entender-se a *fronteira* de um sistema como o subconjunto dos seus componentes que interagem com entidades exteriores ao sistema.

O subconjunto de componentes de um sistema que só interagem com outros componentes do sistema pode ser entendido como o *interior* do sistema.

1.2 Modelos de Sistemas

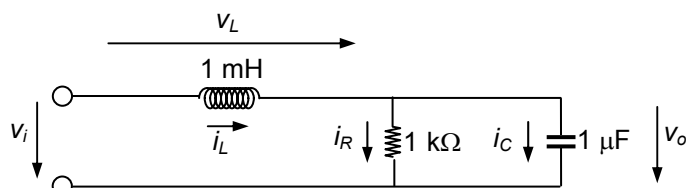
Uma definição ou conceptualização da noção de sistema guia a sua utilização em Engenharia, quer na análise (compreender um sistema), quer na síntese (conceber, projectar, implementar um sistema). Em qualquer uma destas actividades é necessário criar e usar *descrições* do sistema que se está a analisar ou a sintetizar. As descrições completas e rigorosas de um sistema – descrições contendo toda a informação concebível sobre um sistema –, só são possíveis ou só são úteis para sistemas abstractos ou ideais. Em geral usam-se *modelos de sistemas*.

O que é um modelo de sistema?

Um modelo de sistema é uma descrição parcial e/ou aproximada de um sistema, contendo apenas informação relevante para um certo objectivo.

Exemplo 1.9: modelo estrutural de circuito eléctrico.

Considere-se o diagrama de representação de um circuito eléctrico junto, circuito esse que entendemos como um sistema.



Este diagrama é um modelo do circuito. Repare-se que é uma descrição parcial: não especifica o tipo, potência e dimensões do indutor, da resistência e do condensador, nem tão pouco como se realizam as conexões entre eles (se por fio, se por circuito impresso).

Exemplo 1.10: modelo comportamental de circuito eléctrico.

Pode obter-se um outro tipo de modelo para o circuito eléctrico do Exemplo 1.9. Este modelo não descreve os componentes eléctricos do circuito e as suas conexões, mas sim relações entre variáveis. A partir da equação (1.4), e substituindo os símbolos de resistência, capacidade e indutância pelos valores nominais indicados no diagrama, obtém-se

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 10^3 \frac{dv_o}{dt} + 10^9 v_o = 10^9 v_i$$

Um sistema pode ser modelo de outro sistema?

– Sim. Muitos sistemas são modelizados por meio de outros sistemas.

O circuito eléctrico ideal no Exemplo 1.1 pode ser um modelo de um circuito eléctrico real, por exemplo a entrada de um amplificador electrónico. Por sua vez, este circuito eléctrico ideal pode ser modelizado quer pelos sistemas de equações (1.1), (1.2) e (1.3), quer pela equação (1.4). Estes modelos do circuito eléctrico são equivalentes do ponto de vista da informação que podem fornecer sobre as variáveis v_i e v_o .

Os modelos de sistemas utilizam-se com finalidades diferentes. Podemos distinguir modelos *estruturais* e modelos *comportamentais* de sistemas. (Como todas as distinções, esta distinção não deve ser considerada absoluta).

O que é um modelo estrutural de um sistema?

Um modelo estrutural de um sistema descreve o sistema em termos de componentes e de

conexões entre componentes.

Por exemplo, podemos descrever um sistema electrónico indicando os seus componentes e a forma como eles devem ser conectados entre si – é o caso do diagrama do Exemplo 1.9. Modelos deste tipo são necessários para se construir, modificar ou analisar um sistema.

Os modelos estruturais ou de estrutura de um sistema têm uma utilidade específica, mas não são os únicos possíveis. Na análise e síntese de sistemas são necessários *modelos comportamentais*.

O que é um modelo comportamental de um sistema?

Um modelo comportamental de um sistema é um modelo que descreve relações entre *variáveis* de um sistema.

Num sistema podemos distinguir propriedades que podem assumir valores que em princípio é possível medir. Estas propriedades podem caracterizar o sistema de acordo com determinados objectivos. Genericamente chamamos a estas quantidades *parâmetros* do sistema.

Aos parâmetros cujos valores se considera que podem mudar “rapidamente” ao longo do tempo chamamos *variáveis* do sistema. A mudança ou evolução das variáveis ao longo do tempo define o *comportamento* do sistema – para o conjunto de variáveis escolhido.

O comportamento de um sistema não é arbitrário. Observa-se que a evolução de certas variáveis de um sistema está relacionada com a evolução de outras. Um modelo comportamental descreve relações entre as evoluções das variáveis de um sistema.

Exemplo 1.11: relação entre tensões num circuito com resistência e capacidade.

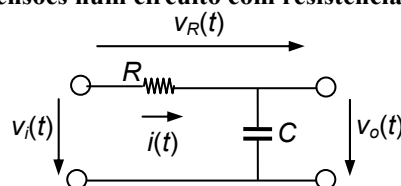


Figura 1-3 Circuito RC série.

Na Figura 1-3 representa-se um circuito eléctrico passivo com resistência R e capacidade C em que a tensão $v_i(t)$ é determinada por um gerador de sinal e a tensão $v_o(t)$ é observada num osciloscópio. Se variarmos o sinal aplicado como $v_i(t)$ – por exemplo, ondas rectangulares com diferentes frequências e amplitudes –, podemos observar que as evoluções de $v_o(t)$ não são arbitrárias: exibem um padrão de regularidade que depende de $v_i(t)$. Como podemos descrever este padrão de regularidade? Podemos dizer que a amplitude e frequência de $v_o(t)$ seguem a amplitude e frequência de $v_i(t)$, com $v_o(t)$ a ser uma imagem exponencialmente atrasada de $v_i(t)$. Com isto quer-se dizer que nas observações

apresentadas tudo se passa como se $v_o(t)$ fosse a soma de uma função exponencial do tempo com $v_i(t)$. Mas porque é isto assim? E continua a descrição a ser válida se a forma de $v_i(t)$ for diferente? Por exemplo, se aplicarmos ondas triangulares como $v_i(t)$?

Para responder a estas e outras perguntas podemos usar alguns factos conhecidos sobre circuitos eléctricos. O circuito da figura é constituído por uma só malha. Pela relação de Kirchhoff para as malhas – o somatório das quedas de tensão numa malha deve ser nulo – tem-se que:

$$v_i(t) = v_R(t) + v_o(t). \quad (1.5)$$

Ou, por outras palavras, a tensão $v_o(t)$ difere de $v_i(t)$ pelo valor de $v_R(t)$. Podemos exprimir $v_R(t)$ a partir de $v_o(t)$? Se sim, obteremos uma “explicação” para a descrição que fizemos do padrão de regularidade. Pela relação de Ohm para tensão e corrente numa resistência, podemos transformar (1.5) para

$$v_i(t) = Ri(t) + v_o(t). \quad (1.6)$$

A corrente $i(t)$ flui no condensador. Como se relaciona $i(t)$ com $v_o(t)$? A carga $q(t)$ de um condensador iguala o produto da sua capacidade C pela tensão aos seus terminais $v_C(t)$. Porque $v_C(t) = v_o(t)$ tem-se que:

$$q(t) = Cv_o(t). \quad (1.7)$$

Num condensador a corrente i iguala a derivada da carga q em ordem ao tempo. Segue-se que se derivarmos (1.7) obtemos

$$i(t) = C \frac{dv_o(t)}{dt}.$$

O que leva a que (1.6) possa ser reescrita como uma equação diferencial que relaciona as tensões $v_i(t)$, $v_o(t)$ e a derivada desta última:

$$RC \frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t) = v_i(t). \quad (1.8)$$

A equação (1.8) diz-nos que há uma relação bem definida entre $v_i(t)$ e $v_o(t)$. Qual? A soma da evolução de v_o ao longo do tempo com o produto da sua derivada pela constante RC igualará a evolução de v_i . Se a evolução de $v_i(t)$ for especificada como sendo uma certa função, então as funções que podem representar a evolução de $v_o(t)$ ficam restringidas a serem de uma certa família – e vice-versa.

Suponha-se que estamos a observar a tensão $v_o(t)$ a partir de um instante que fixamos como origem das medidas de intervalos de tempo. Então, para este instante, $t = 0$. Suponha-se que se observa que para este instante $v_o(t)$ é 0, ou seja $v_o(0) = 0$. Suponha-se ainda que para $t \geq 0$ se observa que os valores de $v_o(t)$ vêm dados pela expressão

$$v_o(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (1.9)$$

Sendo assim, deverá ter-se que

$$\frac{dv_o(t)}{dt} = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Então, a equação (1.8) diz-nos que para $t \geq 0$

$$v_i(t) = RC \frac{dv_o(t)}{dt} + v_o(t) = RC \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} + 1 - e^{-\frac{t}{RC}} = 1.$$

Ou seja, se observamos uma evolução de $v_o(t)$ descrita por (1.9), então a tensão $v_i(t)$ deve ser constante e igual a 1 V: não pode ser qualquer.

Inversamente, suponha-se que

$$v_o(0) = 0 \wedge v_i(t) = 1, \text{ para } t \geq 0.$$

Então a resolução da equação (1.8) mostra-nos que v_o deve ser descrita pela expressão (1.9).

Os modelos comportamentais de sistemas têm grande importância prática. E usualmente quando se fala de modelo de um sistema, refere-se um modelo comportamental. Pode perguntar-se:

Para que se utilizam os modelos comportamentais?

- Para um grande número de fins, dos quais vamos destacar três:
 - Predição do comportamento do sistema;
 - Análise da influência no sistema de variações do valor dos parâmetros;
 - Descrição ou construção de modelos de simulação de um sistema.

A predição do comportamento de um sistema é necessária em muitas situações. Por exemplo, quando se está a projectar um sistema, o sistema não existe e não é viável produzir um protótipo para experimentação. O comportamento do sistema não pode sequer ser observado. Para avançar, o projecto precisa prever qual será o comportamento do sistema em determinadas situações ou simulá-lo. A simulação pode ser vista como uma forma automática de realizar predições e para ser compreendida é também necessário compreender o processo pelo qual se fazem predições do comportamento de um sistema a partir de um modelo comportamental. Vamos ver um exemplo simples que contém todos os ingredientes necessários à compreensão do processo no caso geral.

Exemplo 1.12: predição do comportamento de um circuito RC.

Suponhamos que se pretende prever a evolução da tensão v_o de um circuito RC com a configuração da Figura 1-3, com $R = 1 \text{ k}\Omega$ e $C = 1 \mu\text{F}$, quando v_i for uma onda rectangular com valores compreendidos entre 0 V e 1 V e com frequência 62,5 Hz. Então $RC = 1 \text{ ms}$. Recordemos que o produto de uma resistência por uma capacidade tem de ter a dimensão tempo. Seja $\dim(X)$ uma função que retorna uma expressão das dimensões da grandeza X em símbolos usuais:

$$\dim(RC) = \dim(R)\dim(C) = \frac{V}{I} \frac{Q}{V} = \frac{Q}{I} = \frac{I \cdot t}{I} = t$$

O produto RC é dito a *constante de tempo* do circuito. Designar-se-á uma constante de tempo (eléctrica ou não) por T .

A equação diferencial (1.8) escreve-se na forma normal, omitindo a escrita do argumento t , como

$$\frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{RC}v_o = \frac{1}{RC}v_i. \quad (1.10)$$

Se a função $v_i(t)$ for dada, então a resolução da equação diferencial fornece-nos a expressão de uma família de funções do tempo que satisfazem a equação diferencial. A fixação da condição inicial $v_o(0) = v_0$ permite-nos escolher uma solução da família correspondente ao comportamento observado.

A solução geral de (1.10) no intervalo $t \in [0, \infty[$ escreve-se

$$v_o(t) = v_o(0)e^{-\frac{t}{RC}} + e^{-\frac{t}{RC}} \int_0^t \frac{1}{RC}v_i(\tau)e^{\frac{\tau}{RC}} d\tau. \quad (1.11)$$

Para o caso em estudo, $RC = 1 \text{ ms}$ e o modelo do circuito vem

$$\frac{dv_o}{dt} + 1000v_o = 1000v_i. \quad (1.12)$$

Escolha-se $t = 0$ como o instante em que v_i comuta do valor 0 V para o valor 1 V. Então, supondo que v_i se mantém indefinidamente no valor 1 V, tem-se que a solução geral para a entrada v_i especificada é

$$v_o(t) = v_o(0)e^{-1000t} + 1 - e^{-1000t}$$

Visto que $v_o(0) = 0$, obtém-se

$$v_o(t) = 1 - e^{-1000t}.$$

Esta expressão prediz os seguintes valores, até às centésimas de volt, para v_o nos seguintes instantes múltiplos do valor de $T = RC = 0,001$:

t	0,000	0,001=1T	0,002=2T	0,003=3T	0,004=4T	0,005=5T	0,006=6T	0,007=7T	0,008=8T
v_o	0,00	0,63	0,86	0,95	0,98	0,99	1,00	1,00	1,00

Como a frequência da onda rectangular é de 62,5 Hz, o seu período é de 16 ms. No instante $t = 0,008$ v_o comutará para 0 V. Qual a expressão para $v_o(t)$ nesta nova situação? Uma forma simples de a achar é refazer o raciocínio anterior considerando o instante de comutação de 1 V para 0 V como $t = 0$. Porque a tensão v_i passa a ser nula, a partir deste instante, obtém-se para esta situação de análise

$$v_o(t) = v_o(0)e^{-1000t}.$$

No instante de comutação é $v_o = 1,00$ (pela predição anterior), logo consideraremos $v_o(0) = 1$. A predição dos valores de v_o é agora:

t	0,000	0,001=1T	0,002=2T	0,003=3T	0,004=4T	0,005=5T	0,006=6T	0,007=7T	0,008=8T
v_o	1,00	0,37	0,14	0,05	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00

As predições de um modelo são “sempre correctas”?

Nem sempre. Depende do modelo, do sistema a que o modelo se aplica e do que se

entende por correcto. Se a prova de um pudim consiste em o comer, a prova de um modelo consiste em confrontar as suas predições com os resultados experimentais. O modelo “está correcto” se as predições do modelo e as observações experimentais coincidirem, para a precisão das medidas realizadas. (No Exemplo 1.12 seria necessária uma precisão de medida de 1 em 100 para verificar completamente as predições). Se predições e medidas (suficientemente precisas) não coincidirem, tal não significa necessariamente que o modelo esteja completamente incorrecto. Pode haver erro no valor assumido para os parâmetros do modelo. Ou pode aceitar-se que os erros de predição do modelo não têm importância prática.

Exemplo 1.13: valores nominais e reais de componentes no circuito RC.

Um circuito eléctrico real é construído com componentes cujos valores apresentam tolerâncias mais ou menos elevadas em relação ao chamado valor nominal. Os valores nominais de R e C no circuito eléctrico considerado no Exemplo 1.12 são $R = 1 \text{ k}\Omega$ e $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$. Resistências e condensadores de média qualidade poderão ter tolerâncias de 5% e 10%, respectivamente. Isto significa que se assumirmos no modelo os valores nominais e os componentes tiverem desvios máximos positivos, poderíamos estar a aplicar um modelo que supõe $T = 1 \text{ ms}$ a um circuito que teria $T = 1,155 \text{ ms}$. Para este último valor de T os valores de v_o medidos nos mesmos instantes de tempo da situação anterior seriam:

t	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008
v_o	0,00	0,58	0,82	0,93	0,97	0,99	1,00	1,00	1,00

O Exemplo 1.13 mostra também a utilização de um modelo para analisar as consequências no comportamento de um sistema (ou nas predições do modelo) da variação do valor dos parâmetros. No caso do circuito eléctrico, aumentos dos valores de R ou C levariam a um aumento da constante de tempo e a uma subida ou descida mais lenta da tensão v_o – e vice-versa.

1.3 Classificação de Modelos Comportamentais

Os modelos comportamentais podem classificar-se de acordo com muitos e diversos critérios não necessariamente exclusivos. Quanto à natureza, os modelos podem ser físicos, matemáticos ou computacionais. Os modelos matemáticos podem ainda dividir-se em experimentais e teóricos.

Um modelo *físico* de um sistema poderá ser exactamente um modelo *reduzido* do mesmo, reproduzindo em pequena escala algumas das suas características, ou um modelo *analógico* em que algumas das variáveis se comportam, exacta ou aproximadamente, como variáveis do sistema original. Assim, um circuito eléctrico composto de resistências e

condensadores pode comportar-se, em termos de relação de tensões de entrada e saída, do mesmo modo que um sistema pneumático composto de válvulas e tubagens se comporta, em termos de pressões de alimentação e entrega. Diz-se então que o circuito eléctrico é um modelo analógico do sistema pneumático.

Um modelo *matemático teórico* de um sistema consistirá, no caso geral, numa equação ou num sistema de equações algébricas, diferenciais ou às diferenças em que se expressam as relações entre as variáveis do sistema. A relação entre fluxo e velocidade média de um fluido num tubo, por exemplo, é modelada por uma simples equação algébrica. A relação entre força e posição num sistema mecânico contendo inércia, atrito e elasticidade pode ser descrita por uma equação diferencial linear de segunda ordem de coeficientes constantes. Num turbocompressor, no entanto, as relações entre volume de sucção e entrega e respectivas temperaturas necessitam de um sistema com cerca de 20 relações matemáticas mais ou menos complicadas, como equações diferenciais parciais não-lineares. Modelos matemáticos de sistemas constituídos por equações às diferenças aparecem naturalmente se a variável tempo for tomada como assumindo valores discretos no intervalo de interesse.

Um modelo *matemático experimental* consistirá, por exemplo, em registos simultâneos da evolução das variáveis de entrada e de saída de um sistema. Consideram-se tais registos um modelo matemático porque um modelo teórico deverá permitir explicar e prever a sua forma. Num sentido, um modelo matemático teórico e um modelo matemático experimental do mesmo sistema são equivalentes, pois, se o modelo matemático teórico for correcto, deve poder passar-se de um para o outro.

Um modelo *computacional* consistirá na realização em computador de um modelo matemático de um sistema. Usualmente, um modelo computacional será usado para *simular* o comportamento do sistema.

Os modelos matemáticos teóricos (e os seus parceiros computacionais) podem classificar-se de diferentes formas. Aqui abordaremos as seguintes classes: modelos externos (de entrada-saída) ou internos (de estado), contínuos ou discretos no tempo, estáticos ou dinâmicos, causais ou não causais, lineares ou não-lineares, invariantes ou variantes no tempo, de parâmetros concentrados ou distribuídos.

O que são modelos externos ou de entrada-saída?

Os modelos externos ou de entrada-saída relacionam a evolução de variáveis de entrada de um sistema com a evolução de variáveis de saída do mesmo.

Por *variável de entrada* entende-se uma variável cuja evolução é completamente determinada por causas exteriores ao sistema.

Uma *variável de saída* pode entender-se:

- Em *sentido lato* como qualquer variável que não é variável de entrada e que pode ser

observada.

- Em *sentido estrito* como uma variável que não é variável de entrada e que afecta outros sistemas.

São usuais as seguintes classificações, com origem na língua inglesa:

SISO – modelo com 1 entrada e 1 saída (também dito monovariável ou escalar);

SIMO – modelo com 1 entrada e múltiplas saídas;

MISO – modelo com múltiplas entradas e 1 saída;

MIMO – modelo com múltiplas entradas e múltiplas saídas.

O que é um modelo interno ou de estado?

Um modelo interno ou de estado baseia-se na escolha de um conjunto de variáveis do sistema a que se chamam *variáveis de estado*. O objectivo desta escolha é caracterizar completamente as possíveis situações em que o sistema se possa encontrar com recurso aos valores que as variáveis de estado assumem.

Num modelo de estado, a evolução das variáveis de estado é determinada por elas próprias e pelas variáveis de entrada.

As variáveis de saída de um modelo de estado são definidas a partir das variáveis de estado (podendo ser idênticas a estas) e das variáveis de entrada (se for necessário).

Exemplo 1.14 – modelos de entrada-saída e de estado para o circuito RLC.

Veja-se o circuito na Figura 1-1. Considera-se v_i como variável de entrada e v_o como variável de saída. Então um modelo de entrada-saída é dado pela equação diferencial (1.4) que se rescreve aqui por comodidade:

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{LC} v_o = \frac{1}{LC} v_i. \quad (1.13)$$

Um modelo de estado para o mesmo circuito pode ser escrito considerando como variáveis de estado i_L e v_C , corrente na bobina e tensão no condensador, respectivamente. Porque $v_C = v_o$, então podemos escrever a partir de (1.3) as chamadas *equações de estado*:

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L} v_C + \frac{1}{L} v_i \\ \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} i_L - \frac{1}{RC} v_C \end{cases}. \quad (1.14)$$

Repare-se que este sistema de equações define as *derivadas em ordem ao tempo* das variáveis de estado, à custa das variáveis de estado e da variável de entrada.

Se considerarmos como variável de saída a tensão v_C , então a *equação de saída* escrever-se-á:

$$v_o = v_C. \quad (1.15)$$

Poderíamos considerar como variável de saída não v_C , mas sim i_L . Ou poderíamos considerar ambas.

Neste último caso teríamos um modelo SIMO.

Pode transformar-se um modelo de estado num modelo equivalente de entrada-saída. O modelo de estado definido pelas equações (1.14) e (1.15) pode ser transformado no modelo de entrada-saída (1.13). Transformações de modelos de entrada-saída em modelos de estado também são possíveis, mas não são únicas porque um modelo de entrada-saída pode ser transformado em mais do que um modelo de estado equivalente.

O que é um modelo contínuo no tempo?

Um modelo é dito *contínuo no tempo*, ou simplesmente contínuo, se for assumido que a variável tempo toma valores no conjunto dos números reais, ou seja, $t \in \mathbb{R}$. Intuitivamente: se desenharmos o gráfico da evolução ao longo do tempo de uma variável de um modelo contínuo, então não levantamos a caneta do papel.

Uma consequência de se usar um modelo contínuo é a seguinte. Considere-se um intervalo de tempo $[t_0, t_f]$. Em princípio, um modelo contínuo permite prever os valores das variáveis do modelo para qualquer $t \in [t_0, t_f]$.

Um modelo contínuo de um sistema é psicologicamente “natural”, porque usualmente *percebemos* a passagem do tempo como contínua. Os modelos contínuos são úteis e cómodos de aplicar para muitos sistemas. Todos os exemplos apresentados até agora de modelos são contínuos. Mas há que ter em atenção que há sistemas que são mais facilmente – ou mesmo necessariamente – descritos por modelos discretos.

O que é um modelo discreto no tempo?

Num modelo discreto no tempo supõe-se que os valores das variáveis do modelo só estão definidos para uma sequência de instantes de tempo $t_k = t_0, t_1, t_2, \dots$. Em geral, considera-se que o índice k dos instantes de tempo pertence ao conjunto dos inteiros, ou seja $k \in \mathbb{Z}$.

Os modelos discretos de sistemas são usualmente estabelecidos supondo que o intervalo h entre dois instantes de tempo sucessivos é constante¹:

$$\forall k, t_{k+1} - t_k = h. \quad (1.16)$$

O valor de h e o seu inverso $f_a = 1/h$ são chamados *período* e *frequência de amostragem*, respectivamente. A relação entre t_k e k vem dada por $t_k = kh$.

Nos modelos discretos no tempo, pode usar-se como variável independente o índice k dos instantes de tempo. Escreve-se então uma variável como $x(k)$ em vez de escrever $x(t_k)$. Se os instantes de tempo estiverem espaçados de um intervalo de tempo h , então $t_k - t_0 = kh$ e

¹ Relembremos que em modelos contínuos t toma valores em $\mathbb{R}$. Em modelos discretos usamos o símbolo k para representar os instantes de tempo para os quais os valores do modelo estão definidos. Os valores de k estão em $\mathbb{Z}$.

poderá haver também interesse em escrever $x(kh)$ em vez de $x(k)$.

Os modelos discretos são de utilização natural para descrever o comportamento de sistemas digitais –como os sistemas computadorizados– ou sistemas que têm um princípio de operação pulsante. Um processo digital de medida de uma grandeza implica para a sua realização um tempo não-nulo. Logo num dado intervalo de tempo só se poderá dispor de um número finito de medidas espaçadas entre si de um certo intervalo de tempo. Em tais situações, um modelo discreto é mais fácil de usar e compreender do que seria um modelo contínuo.

Exemplo 1.15 – medida discreta de tensão num circuito RC.

Considere-se no Exemplo 1.12 a situação do condensador se estar a descarregar ($v_i = 0$). Então

$$v_o(t) = v_o(0)e^{-1000t} = 1 \cdot e^{-1000t} = e^{-1000t}.$$

Suponha-se agora que se está a medir a tensão v_o com um conversor analógico-digital (A/D) que coloca na sua saída um valor de medida a cada 500 μ s. Teríamos então $t_k = k \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = 0,0005k$. A sequência de valores que se obterá na saída do conversor terá então por expressão:

$$v_o(t_k) = v_o(0,0005k) = e^{-1000 \cdot 0,0005k} = e^{-0,5k}. \quad (1.17)$$

Se escrevermos a expressão tendo como argumento k (o que podemos fazer dado que a expressão final só depende de k), obtemos:

$$v_o(k) = e^{-0,5k} \quad (1.18)$$

Podemos tabular os valores de $v_o(k)$ até às centésimas de volt, de $k = 0$ até $k = 8$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$v_o(k)$	1,00	0,61	0,37	0,22	0,14	0,08	0,05	0,03	0,02

Note-se que o modelo (discreto de v_o) reflecte o facto de o conversor A/D só dar informação sobre os valores de v_o nos instantes t_k .

Exemplo 1.16 – modelo discreto de circuito RC com conversores D/A e A/D.

Suponha-se que a partir do circuito RC do Exemplo 1.12 construíamos um circuito em que a tensão v_i seria imposta por um conversor digital-analógico (D/A) e a tensão v_o seria medida por um conversor A/D. Veja-se a Figura 1-4. Os símbolos $v_i(k)$ e $v_o(k)$ são codificações digitais dos valores de tensão v_i a impor e v_o a medir, respectivamente.

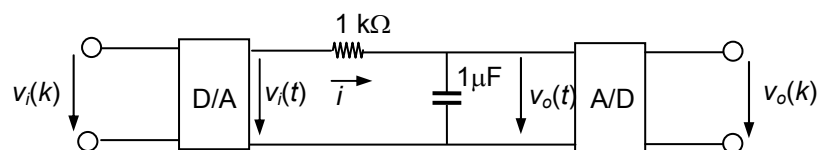


Figura 1-4 Circuito RC com conversores D/A e A/D

Pode mostrar-se que para um espaçamento² entre medidas de 0,5 ms, e sob condições adequadas, o

² O espaçamento entre medidas é constante e por isso podemos falar de período. Poder-se-ia dizer período

modelo discreto que relaciona $v_o(k)$ e $v_i(k)$ é:

$$v_o(k+1) - 0,6065v_o(k) = 0,3935v_i(k) . \quad (1.19)$$

Pode escrever-se (1.19) numa forma equivalente mais compreensível:

$$v_o(k) = 0,3935v_i(k-1) + 0,6065v_o(k-1) \quad (1.20)$$

Um sistema terá que ser descrito por diferentes modelos discretos se h variar. Um modelo contínuo não depende de amostragem e nesse sentido é único. Ele é simultaneamente origem e limite de seqüências de modelos discretos. A seguir apresenta-se um exemplo.

Exemplo 1-17: modelo discreto de circuito RC em função de h .

Suponha-se o circuito na Figura 1-5. Trata-se de uma generalização do circuito no Exemplo 1-16, Figura 1-4. As variáveis $v_i(kh)$ e $v_o(kh)$ são definidas apenas nos instantes de tempo $t = kh$. As variáveis $v_i(t)$ e $v_o(t)$ estão definidas para todos os instantes de tempo t .

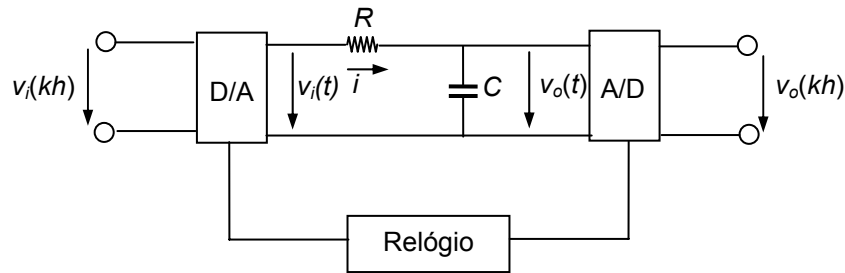


Figura 1-5 Circuito RC com conversores DA e AD sincronizados por um relógio.

Nestas condições, é possível deduzir o seguinte modelo discreto para o circuito:

$$v_o(kh+h) = e^{-\frac{h}{T}} v_o(kh) + (1 - e^{-\frac{h}{T}}) v_i(kh) . \quad (1.21)$$

O modelo (1.19) resulta de (1.21) com a substituição $T = 0.001$ e $h = 0.0005$.

Escrevamos agora

$$\begin{aligned} a &= e^{-\frac{h}{T}} \\ b &= 1 - e^{-\frac{h}{T}} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Quando h varia entre 0 e ∞ , a varia entre 1 e 0, b entre 0 e 1, cada valor de h dando origem a um modelo discreto do comportamento do circuito.

O que diferencia os modelos estáticos dos modelos dinâmicos?

Num *modelo ou relação estática*, o valor da variável (considerada) de saída num instante t é expresso como uma função do valor da variável de entrada *no mesmo instante*³:

$$y(t) = f(u(t)) \quad (1.23)$$

Exemplo 1.18: corrente e tensão numa resistência.

Como é conhecido, a relação entre corrente i e tensão v numa resistência de valor R dada pela lei de Ohm é $v = Ri$. Este modelo é um caso particular de (1.23).

Note-se que num modelo estático, para cada valor da variável de entrada, a variável de saída só pode apresentar um (e só um) valor.

Num *modelo ou relação dinâmica*, o valor da variável (considerada) de saída num instante t depende do(s) valor(es) da variável de entrada *em outro(s) instantes de tempo (passados ou futuros)*.

Exemplo 1.19: modelo de entrada-saída do circuito RC.

O modelo de circuito RC do Exemplo 1.11 é um modelo dinâmico. Com efeito podemos reescrever a equação (1.8)

$$RC \frac{dv_o}{dt} + v_o = v_i$$

na forma

$$\frac{dv_o(t)}{dt} = \frac{1}{RC} (v_i(t) - v_o(t)).$$

Se integrarmos ambos os membros da equação entre o instante 0 e o instante t , obtém-se⁴:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{dv_o(\tau)}{d\tau} d\tau &= \int_0^t \frac{1}{RC} (v_i(\tau) - v_o(\tau)) d\tau \\ v_o(t) - v_o(0) &= \frac{1}{RC} \int_0^t (v_i(\tau) - v_o(\tau)) d\tau \\ v_o(t) &= \frac{1}{RC} \int_0^t (v_i(\tau) - v_o(\tau)) d\tau + v_o(0) \end{aligned}$$

A última equação mostra que o valor de v_o no instante t dependerá dos valores de v_i no intervalo de tempo $[0, t]$ – bem como do valor inicial de v_o .

Note-se que num modelo dinâmico, a variável de saída pode apresentar mais do que um

³ Por esta razão, um modelo estático também é dito “sem memória”.

⁴ Como a variável t designa o instante *final* do intervalo de integração, necessitamos de usar outra variável para referir os instantes do intervalo – $[0, t]$ – e usaremos τ para tal.

valor para cada valor da variável de entrada. Esta observação permite responder à pergunta seguinte.

Quando é que um sistema *admite* um modelo estático?

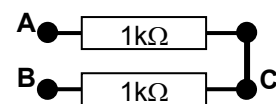
Um sistema admite um modelo estático, se *nas condições de observação de interesse* apresentar um valor constante da variável de saída para cada valor constante da variável de entrada.

Quando é que um sistema *requer* um modelo dinâmico?

Um sistema requer um modelo dinâmico, se *nas condições de observação de interesse* apresentar valores diferentes da variável de saída para cada valor constante da variável de entrada.

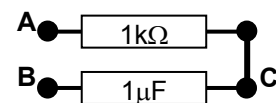
Exemplo 1.20: circuito divisor de tensão com duas resistências.

Considere-se um circuito divisor de tensão representado esquematicamente na figura. Considerando a tensão v_{CB} como de saída e v_{AB} como de entrada, escreveremos $v_{CB} = 0,5 v_{AB}$. Consegue-se imaginar uma situação em que este modelo estático não esteja de acordo com as observações e deva ser substituído por um modelo dinâmico? Sim, se o circuito estiver submetido a sinais de frequência suficientemente elevada para que a indutância dos componentes resistivos seja significativa.



Exemplo 1.21: circuito com resistência e condensador.

A relação entre as tensões v_{CB} e v_{AB} num circuito com uma resistência e um condensador como representado na figura, é expressa por um modelo dinâmico como se mostrou no Exemplo 1.20. A resposta predita pelo modelo para a aplicação em v_{AB} de uma onda rectangular de frequência 62,5 Hz foi apresentada no Exemplo 1.12. Considere-se agora a aplicação de uma onda rectangular similar, mas de frequência 0,625 Hz. O semiperíodo da onda é agora de 800 ms. A carga ou descarga do condensador demoram aproximadamente 5 ms. Qual a fracção de tempo em que a tensão aos terminais do condensador é igual à tensão de entrada? $1 - (5/800)$ ou seja 99,375 % do tempo. Nestas condições, fará sentido usar o modelo estático: $v_{CB} = v_{AB}$!



Submodelos estáticos

Modelos estáticos e modelos dinâmicos têm definições exclusivas. Um modelo ou é estático ou é dinâmico, mas não os dois. No entanto, certos modelos dinâmicos apresentam um subconjunto estático de componentes. Outros não.

Exemplo 1.22: submodelo estático de um circuito RC.

O modelo de circuito RC

$$RC \frac{dv_o}{dt} + v_o = v_i$$

tem por submodelo estático

$$v_o = v_i .$$

Este modelo é válido se

$$\frac{dv_o}{dt} = 0 .$$

Um submodelo estático informa-nos sobre o comportamento do sistema quando as derivadas da saída são 0.

Exemplo 1.23: modelo dinâmico sem submodelo estático.

O modelo de um integrador

$$\frac{dy}{dt} = u$$

não tem submodelo estático. Quando

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

a saída y pode ser qualquer. A partir de u nada se pode dizer sobre o valor da saída.

Exemplo 1.24: submodelo estático implícito.

Um derivador ideal tem por modelo

$$y = \frac{du}{dt} .$$

Quando

$$\frac{du}{dt} = 0$$

a saída y é 0, qualquer que seja o valor de u . Podemos então escrever

$$y = 0 \cdot u$$

o que constitui um (sub)modelo estático implícito.

O que distingue modelos causais de modelos não-causais?

Num *modelo causal*, a saída depende apenas do valor presente ou de valores passados da entrada. Num *modelo não-causal* a saída depende de valores futuros da entrada.

Exemplo 1.25: modelo discreto não causal.

A seguinte equação configura um modelo não-causal:

$$y(k) = u(k) + u(k+1) - y(k-1) . \quad (1.24)$$

A saída y no instante k depende do valor da entrada u no instante futuro $k+1$.

A questão de um modelo ser ou não causal é importante, porque num modelo não-causal o valor da variável de saída depende de valores futuros da variável de entrada (e eventualmente de si própria). Ninguém sabe como construir sistemas dos quais se possa dizer que o valor de uma variável no instante presente depende do valor futuro de outra variável, se não se conhecer no presente quais os valores futuros dessa outra variável. Por tal pensa-se usualmente em modelos causais para a realização de sistemas.

Este facto não torna os modelos não-causais desinteressantes. Muitos modelos não-causais podem ser aproximados por um modelo causal. Se a aproximação for aceitável, a utilização de modelos não-causais pode muitas vezes simplificar a análise e síntese. É o caso do circuito derivador. Modelos não-causais também são conceptualmente úteis em sistemas de processamento ‘off-line’, em que se conhecem os valores futuros⁵ de variáveis, como na reprodução ou processamento de música ou imagens.

Qual a importância da distinção entre modelos lineares e não-lineares?

A importância desta distinção é muito grande. Nos modelos lineares são válidos os chamados *princípios da sobreposição* e da *homogeneidade*.

Para se compreender o princípio da sobreposição vamos imaginar a seguinte experiência, a realizar num sistema SISO com entrada u e saída y seguindo os seguintes passos.

- Impõe-se que u evolua de uma certa forma ao longo do tempo. Descreveremos a evolução de u como uma função $u_1(t)$. Regista-se a evolução da saída y e observa-se que esta é descrita por uma função $y_1(t)$.
- Em seguida, impõe-se que u evolua de uma outra forma ao longo do tempo que descreveremos como uma função $u_2(t)$. Regista-se a evolução da saída y e observa-se que esta é descrita por uma função $y_2(t)$.
- Por fim, impõe-se que u evolua de uma forma ao longo do tempo que seja descrita por função $u_3(t) = u_1(t) + u_2(t)$. Regista-se a evolução da saída y e observa-se que esta é descrita por uma função $y_3(t)$.

Então se $y_3(t) \neq y_1(t) + y_2(t)$, o princípio da sobreposição não é válido no sistema.

Por outro lado se $y_3(t) = y_1(t) + y_2(t)$, *quaisquer que sejam* $u_1(t)$ e $u_2(t)$, então o princípio da sobreposição é válido. Isto significa que a resposta do sistema a uma evolução da entrada é a soma das respostas a cada parcela em que a evolução da entrada se pode decompor.

⁵ Conhecem-se os valores futuros no sentido de que são valores posteriores aos que estão a ser processados num certo instante (foram registados depois). Não no sentido de que se consegue “adivinhar” com absoluta certeza quais vão ser esses valores.

O princípio da sobreposição tem grande importância prática porque facilita imensamente o cálculo da resposta de um sistema a uma entrada que seja uma soma de entradas para as quais se conhece a resposta a cada uma.

O princípio da homogeneidade enuncia-se mais facilmente. Suponha-se que a uma evolução da entrada (ou sinal de entrada) $u_1(t)$ o sistema responde com uma evolução da saída (ou sinal de saída) $y_1(t)$. Se o princípio da homogeneidade for válido no sistema, então a sua resposta a um sinal de entrada $u_3(t) = c_1 u_1(t)$ será $y_3(t) = c_1 y_1(t)$, qualquer que seja a constante c_1 .

O princípio da homogeneidade tem grande importância prática porque ele significa que o sistema reage a variações da amplitude dos sinais de entrada, variando na mesma proporção a amplitude dos sinais de saída.

A linearidade de um modelo SISO pode definir-se combinando os princípios de sobreposição e homogeneidade.

Definição 1.1 Sejam c_1 e c_2 constantes. Suponha-se que num modelo se tem que a entrada $u_1(t)$ provoca a saída $y_1(t)$ e a entrada $u_2(t)$ provoca a saída $y_2(t)$.

O modelo será *linear* se e só se:

$$\forall u_1 \forall u_2 \forall c_1 \forall c_2 \text{ a entrada } u_3(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \text{ provoca a saída } y_3(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

Um modelo será não-linear se não for linear.

Os modelos lineares são de grande importância porque podem ser caracterizados matematicamente de uma forma simples e poderosa e porque são aplicáveis na descrição de muitos sistemas.

A aplicação de um modelo linear para a descrição de um sistema terá que ter em conta o seu domínio de validade. Com isto quer-se dizer que, em geral, um modelo linear só é válido, só dá uma boa descrição do comportamento do sistema, numa certa zona de funcionamento deste.

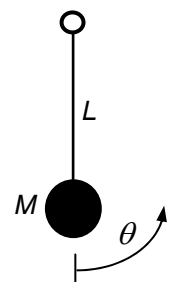
Exemplo 1.26: modelos não-linear e linear de um pêndulo sem atrito.

Consideremos um pêndulo rígido de massa M e comprimento L . O pêndulo é suposto ideal: não tem atrito e a sua haste tem massa nula.

A origem da medida do deslocamento angular θ é a posição de equilíbrio. O pêndulo está apenas sujeito à aceleração da gravidade de valor g . Podemos, no entanto, deslocá-lo de um ângulo inicial $\theta(0)$ e deixá-lo evoluir livremente a partir dessa situação.

Nestas condições o comportamento do pêndulo é descrito pela equação diferencial (homogénea):

$$J\ddot{\theta} + MgL \sin \theta = 0. \quad (1.25)$$



Em (1.25) $J = ML^2$ é o momento de inércia do pêndulo referido ao seu eixo de oscilação. O modelo dado por esta equação é não-linear, devido à presença do termo em seno, e é válido para qualquer deslocamento angular θ . No entanto, se estivermos interessados apenas em pequenos deslocamentos, podemos *linearizar* (1.25) à volta de $\theta = 0$, de forma a obter-se o modelo linear (usualmente usado no intervalo $-0,1 \text{ rad} < \theta < +0,1 \text{ rad}$):

$$J\ddot{\theta} + MgL\theta = 0. \quad (1.26)$$

Tendo isto em mente, os modelos lineares revelam-se de grande utilidade e de aplicação muito geral.

Porquê modelos invariantes e variantes no tempo?

Há sistemas que pela sua natureza e características implicam que os parâmetros dos modelos que os representam mudem de valor ao longo do tempo. Por exemplo, a massa total de um veículo de corrida diminui ao longo de uma prova, como resultado do consumo de combustível, e esta diminuição tem efeitos evidentes no comportamento do veículo. Para descrever sistemas em que a variação dos parâmetros afecta significativamente o comportamento dos mesmos, usam-se então modelos *variantes no tempo*.

Inversamente, modelos *invariantes no tempo* são aqueles em que os valores dos parâmetros são constantes ao longo do intervalo de tempo em que se estuda o comportamento dos sistemas que os modelos descrevem. Modelos *variantes no tempo* podem ser lineares, desde que a variação dos parâmetros não esteja correlacionada com a variação das variáveis.

Modelos de parâmetros concentrados e de parâmetros distribuídos

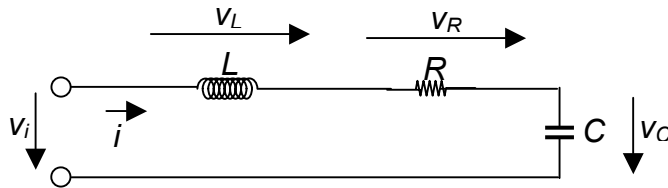
Os modelos a abordar neste texto são também ditos de *parâmetros concentrados*. Ao contrário de um modelo de parâmetros concentrados, um modelo de *parâmetros distribuídos* descreve o comportamento de um sistema não apenas com variáveis cujo valor depende das dimensões tempo e espaço, mas também com parâmetros cujo valor pode mudar ao longo das dimensões espaciais.

Exercícios

1. Apresente 4 exemplos de sistemas não referidos neste texto. Para cada um, diga quais são as entidades do sistema e se estas podem ser indicadas como um conjunto no sentido matemático. Diga também se usou a forma A ou a forma B para distinguir ou conceber cada um dos exemplos.
2. Um sistema S tem o seguinte conjunto de componentes: $C(S) = \{a, b, c, d\}$. Nenhum dos componentes de S é entendido como um sistema.

- a) Indique os sub-conjuntos de $C(S)$ que podem ser conjuntos de componentes de subsistemas de S .
- b) S tem os seus componentes conectados ou relacionados pela seguinte série: $a-b-c-d$. Indique os subsistemas de S .

3. Considere o seguinte circuito eléctrico, entendido como um sistema:



- a) Quais são os componentes deste sistema?
- b) Que subsistemas consegue distinguir neste sistema?
- c) Quais são as variáveis e os parâmetros deste sistema?
- d) Utilizando a lei de Kirchhoff das malhas, estabeleça uma equação diferencial que relacione a tensão v_i (entendida como variável de entrada) com a tensão v_C (entendida como variável de saída). Nota:

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \text{ e } C \frac{dv_C(t)}{dt} = i(t).$$

- e) Estabeleça um modelo de estado para o sistema considerando como variáveis de estado $i(t)$ e $v_C(t)$ e como variável de saída $v_R(t)$.

4. A partir da equação (1.21) determine 4 modelos discretos para o circuito electrónico da Figura 1-5, nas seguintes condições: i) a constante de tempo é sempre $T = 0.1$ s; ii) os valores de h são respectivamente 0.025, 0.05, 0.1 e 0.2 s.

Para cada modelo, determine qual a sua predição para a sequência de valores de tensão $v_o(kh)$, $k \in [1, 2, 3, 4, 5, 6]$ supondo que:

$$\begin{cases} v_o(kh) = 0 & \text{se } k \leq 0 \\ v_i(kh) = 0 & \text{se } k < 0 \\ v_i(kh) = 1 & \text{se } k \geq 0 \end{cases}$$

5. Dê 4 exemplos de modelos estáticos e 4 exemplos de modelos dinâmicos não referidos no texto. Indique a razão que o faz considerar cada modelo como sendo estático ou dinâmico.

6. Mostre que o modelo estático $y(t) = bu(t) + b_0$ (b e b_0 , constantes) é não-linear.

7. Mostre que o modelo $y(t) = \frac{du(t)}{dt}$, em que y é variável de saída e u é variável de entrada, é linear e não-causal.

8. Mostre que o modelo $y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$, em que y é variável de saída e u é variável de entrada, é linear e causal.

9. Mostre que o modelo $y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau + y(0)$, em que y é variável de saída e u é variável de entrada, é não-linear se $y(0) \neq 0$.

10. Mostre que o modelo $y(t) = u(t - T_a)$ é dinâmico, linear e causal.